

# UNIVERSITÄT BONN

## Physikalisches Institut

### Messung der starken Kopplungskonstanten $\alpha_s$ und der hadronischen Spektralfunktionen in $\tau$ -Zerfällen

von  
Sven Menke

**Abstract:** The spectral functions of the vector current and the axial-vector current have been measured in hadronic  $\tau$  decays using the OPAL detector at LEP. Within the framework of the Operator Product Expansion a simultaneous determination of the strong coupling constant  $\alpha_s$ , the non-perturbative operators of dimension 6 and 8 and of the gluon condensate has been performed. Different perturbative descriptions have been compared to the data. The Contour Improved Fixed Order Perturbation Theory gives  $\alpha_s(m_\tau^2) = 0.348 \pm 0.009_{\text{exp}} \pm 0.019_{\text{theo}}$  at the  $\tau$ -mass scale and  $\alpha_s(m_Z^2) = 0.1219 \pm 0.0010_{\text{exp}} \pm 0.0017_{\text{theo}}$  at the  $Z^0$ -mass scale. The values obtained for  $\alpha_s(m_Z^2)$  using Fixed Order Perturbation Theory or Renormalon Chain Resummation are 2.3 % and 4.1 % smaller, respectively. The ‘running’ of the strong coupling between  $s_0 \simeq 1.3 \text{ GeV}^2$  and  $s_0 = m_\tau^2$  has been tested from direct fits to the integrated differential hadronic decay rate  $R_\tau(s_0)$ . A test of the saturation of QCD sum rules at the  $\tau$ -mass scale has been performed.

Post address:  
Nußallee 12  
D-53115 Bonn  
Germany



BONN-IR-98-13  
Bonn University  
October 1998  
ISSN-0172-8741



UNIVERSITÄT BONN  
Physikalisches Institut

**Messung der starken Kopplungskonstanten  $\alpha_s$  und der  
hadronischen Spektralfunktionen in  $\tau$ -Zerfällen**

von  
Sven Menke

Dieser Forschungsbericht wurde als Dissertation von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn angenommen.

Angenommen am: 28. September 1998  
Referent: Prof. Dr. N. Wermes  
Korreferent: Prof. Dr. E. Klempt



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	3
<b>2. QCD in <math>\tau</math>-Zerfällen</b>	7
2.1 Hadronische $\tau$ -Zerfälle	7
2.2 Perturbative Beschreibung der Vakuumpolarisation	14
2.2.1 Berechnung von $R_\tau$ mit „FOPT“	18
2.2.2 Berechnung von $R_\tau$ mit „CIPT“	20
2.2.3 Berechnung von $R_\tau$ mit „RCPT“	21
2.3 Operator-Produkt-Entwicklung	24
2.4 Elektroschwache Korrekturen	27
2.5 QCD-Summenregeln	28
<b>3. Das Experiment</b>	31
3.1 Der LEP-Speicherring	31
3.2 Der OPAL-Detektor	32
<b>4. Photon Rekonstruktion</b>	37
4.1 Elektromagnetische Schauer-Simulationen	37
4.2 Schauerparametrisierung im Zentralbereich	41
4.3 Schauerparametrisierung in den Endkappen	45
4.4 Nachweis von Photonen	49
<b>5. Ereignisselektion</b>	55
5.1 Selektion von $\tau$ -Paaren	55
5.2 Selektion semihadronischer Endzustände	60
5.2.1 Prinzip der „Maximum Likelihood“ Selektion	60
5.2.2 Referenz-Verteilungen	61
5.3 Anwendung der Selektion auf die Daten	68
5.4 Rekonstruktion neutraler Pionen	71
<b>6. Entfaltung</b>	77
6.1 Motivation	77
6.2 Methode	77
6.3 Korrelationen	86
<b>7. Resultate</b>	91
7.1 Gemessene Spektren	91
7.1.1 Entfaltung der Daten	95
7.1.2 Systematische Fehler	102
7.2 Spektralfunktionen	103
7.3 Momente von $R_\tau$	110

---

7.4	Messung der starken Kopplungskonstanten $\alpha_s(m_\tau^2)$ . . . . .	111
7.4.1	Extrapolation von $\alpha_s$ von der $\tau$ -Masse zur $Z^0$ -Masse . . . . .	116
7.5	Das „Laufen“ der starken Kopplung . . . . .	117
7.5.1	Die Zerfallsrate eines hypothetischen $\tau'$ -Leptons . . . . .	118
7.6	Messung der nicht-perturbativen Korrekturen . . . . .	121
7.7	Vergleich mit anderen Experimenten . . . . .	124
7.8	QCD-Summenregeln . . . . .	126
7.8.1	Polarisierbarkeit des Pions . . . . .	128
<b>8.</b>	<b>Zusammenfassung</b> . . . . .	<b>129</b>

# 1. Einleitung

Gegenstand der Forschung auf dem Gebiet der Teilchenphysik sind die Struktur und die Phänomene der Wechselwirkungen (WW), die die uns umgebende Welt prägen. Vier verschiedene WW, die Gravitation, die elektromagnetische WW, die schwache WW und die starke WW können heute unterschieden werden. Allen gemeinsam ist die Vorstellung, daß die Bausteine der Materie, sogenannte Fermionen, über Austauschteilchen, sogenannte Bosonen, die die Art der WW charakterisieren, abstoßende und anziehende Kräfte aufeinander ausüben. Ein Fermion sendet dabei ein Boson aus, das dann von dem anderen Fermion absorbiert wird und so die Energien und Impulse beider Fermionen ändern kann.

Ausgerechnet die schwächste WW, die Gravitation, ist wegen der großen Masse der Erde und der bemerkenswerten Tatsache, daß nur anziehende Kräfte durch diese WW vermittelt werden, ständig spürbar und am längsten bekannt. Auf dem Niveau kleinster Teilchen im atomaren und subatomaren Bereich wirkt sich die Gravitation allerdings kaum aus und wird deshalb im folgenden nicht weiter betrachtet.

Die elektromagnetische WW ist, zunächst getrennt in elektrische und magnetische WW, ebenfalls seit langem bekannt. Ende des 19. Jahrhunderts wurden die elektrische und die magnetische WW als Teil einer universellen elektromagnetischen WW, deren Austauschteilchen das Photon ist, erkannt und vereinigt. Chemische Prozesse und atomare Bindungen beruhen auf dieser WW. Die Quanten-Elektro-Dynamik (QED), die auf der Ebene elementarer Teilchen, wie Elektronen, Positronen und Photonen, die Phänomene der elektromagnetischen WW beschreibt, stellt eine der erfolgreichsten Entwicklungen in der Physik Mitte des 20. Jahrhunderts dar. Vorhersagen der QED erreichen Genauigkeiten von bis zu  $10^{-9}$  und konnten mit Präzisionsexperimenten immer wieder bestätigt werden.

Seit der Entdeckung der Radioaktivität ( $\beta$ -Zerfall) und den ersten theoretischen Ansätzen, um sie zu beschreiben (1933), ist die Theorie der schwachen WW bis in die 80er Jahre dieses Jahrhunderts hinein ständig weiterentwickelt worden. 1983 gelang der UA1-Kollaboration der Nachweis der schweren Austauschteilchen der schwachen WW, nämlich der  $W^+$ -,  $W^-$ - und  $Z^0$ -Bosonen. Bereits 1967 sind diese Austauschteilchen im Rahmen eines Modells, das die elektromagnetische und die schwache WW zu einer elektro-schwachen WW vereinigt, vorhergesagt worden, und die Entdeckung dieser Teilchen 16 Jahre später stellte einen eindrucksvollen Beleg der Gültigkeit dieser Theorie dar.

Gegenstand dieser Arbeit ist die starke WW, die seit den 30er Jahren dieses Jahrhunderts erforscht wird. Ihr Name stammt aus der Kernphysik, die die Frage zu beantworten hatte, welche Kraft die gleichnamig geladenen Protonen im Atomkern zusammenhält. Während zunächst das aus der Höhenstrahlung bekannte  $\pi$ -Meson als Austauschteilchen der starken WW galt, konnte das 1964 postulierte Quark-Modell, in dem die bis dahin als elementar geltenden Kernbausteine Proton und Neutron Bindungszustände sogenannter Quarks sind, die durch 8 masselose Austauschteilchen, den Gluonen, so stark gebunden sind, daß die Restwechselwirkung, die benachbarte Nukleonen im Kernverband aufeinander ausüben, ausreicht, um die Stabilität der Kerne zu erklären, durch die Entdeckung von Substrukturen im Proton bestätigt werden. Die Entdeckung des  $J/\psi$ -Mesons 1974, das nur durch die Annahme der Existenz eines weiteren Quarks, dem „Charm“-Quark, als Bindungszustand dieses Quarks und seines Antiteilchens erklärt wer-

den konnte sowie die Entdeckungen des „Bottom“-Quarks 1977 und des „Top“-Quarks 1994 haben zur Komplettierung des Quark-Modells geführt, das nun sechs verschiedene Quarksorten kennt. Im Unterschied zu anderen elementaren Fermionen, sind die Quarks allerdings nicht frei beobachtbar, sondern treten immer in Bindungszuständen mit einem Antiquark (Mesonen) oder zwei anderen Quarks (Baryonen) auf. Die Quanten-Chromo-Dynamik (QCD) ist, ähnlich wie die QED für die elektromagnetische WW, die Theorie der starken WW zwischen den Quarks und Gluonen. Das Pendant zur elektrischen Ladung ist in der QCD die sogenannte Farbladung, die in drei verschiedenen Qualitäten, die man willkürlich nach den drei Grundfarben Rot, Grün und Blau benannt hat, auftritt. Die Tatsache, daß Quarks stets in Bindungszuständen auftreten, läßt sich mit dieser Nomenklatur für die Ladungszustände der starken WW dadurch ausdrücken, daß alle frei existierenden Teilchen oder Zustände farbneutral sind.

Nach dem sogenannten Standardmodell der Elementarteilchenphysik kann man die fundamentalen Bausteine der Materie in folgendem Schema darstellen:

		Fermionen			Bosonen			
		1	2	3	$\gamma$	$W^\pm$	$Z^0$	G
Familie					Wechselwirkung			
Leptonen	{	$\begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \times \\ \times \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \times \\ \times \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \times \\ \times \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$
		$e_R^-$	$\mu_R^-$	$\tau_R^-$	$\times$		$\times$	
Quarks	{	$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \times \\ \times \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \times \\ \times \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \times \\ \times \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \times \\ \times \end{pmatrix}$
		$u_R$ $d'_R$	$c_R$ $s'_R$	$t_R$ $b'_R$	$\times$ $\times$		$\times$ $\times$	$\times$ $\times$

(1.1)

Quarks und Leptonen sind in drei Familien aufgeteilt, die sich im wesentlichen durch ihre Massen unterscheiden. Die Mitglieder der leichtesten Familie ( $e^-$ ,  $\nu_e$ ,  $u$ ,  $d$ ) sind die Bausteine der „normalen“ Materie. Die Mitglieder der schwersten, dritten Familie und der zweiten Familie sind (bis auf die Neutrinos<sup>1</sup>) instabil und müssen entweder künstlich erzeugt werden oder sind in der kosmischen Höhenstrahlung, die bei hochenergetischen Prozessen im All entsteht, nachweisbar. Das Schema zeigt die Aufteilung der Teilchen in die Eigenzustände der schwachen WW. Die Quarks  $d'$ ,  $s'$  und  $b'$  sind dabei gemischte Zustände aus den Massen-Eigenzuständen  $d$ ,  $s$  und  $b$ . Die geladenen Austauscheteilchen der schwachen WW koppeln nur an die „linkshändigen“ Zustände der Fermionen, die sich für Leptonen und Quarks in Dublets (hier durch den Index „L“ dargestellt) einteilen lassen. Die „rechtshändigen“ Partner der Fermionen sind daher in Singulets (mit dem Index „R“) angeordnet. Zustände in einem Dublet gehören zum sogenannten schwachen Isospin  $T = 1/2$ , unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen der dritten Isospin-komponente  $T_3 = \pm 1/2$  und haben sonst die gleichen Eigenschaften in Bezug auf die schwache WW. Der Singuletzustand entspricht dem schwachen Isospin  $T = 0$ . Die Kreuze auf der rechten Seite von (1.1) stehen für eine mögliche Kopplung eines Fermions aus einer beliebigen Familie mit einem Photon,  $W^\pm$ -Boson,  $Z^0$ -Boson oder Gluon. Photonen koppeln nur an geladene Fermionen,  $W$ -Bosonen nur an linkshändige Fermionen,  $Z^0$ -Bosonen an alle Fermionen und Gluonen

<sup>1</sup> Hier wird von dem Fall ausgegangen, daß die Neutrinos keine Masse haben.



nur an Quarks. Die Stärke, mit der die Bosonen an die Fermionen koppeln, ist entscheidend für die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Prozeß dieser Art auftritt. Findet die WW über ein Photon statt, ist die Kopplungskonstante  $\alpha \simeq 1/137$  der QED der relevante Parameter. Die hohe Masse der Austauschbosonen der schwachen WW, deren Kopplungskonstante im Rahmen der elektroschwachen Theorie ebenfalls durch  $\alpha$  gegeben ist, reduziert bei Energien unterhalb dieser Masse die Wahrscheinlichkeitsamplitude eines schwachen Prozesses gegenüber der Amplitude eines vergleichbaren elektromagnetischen Prozesses. Bei der Energie  $\sqrt{s} \sim 1 \text{ GeV}$  ergibt sich aus dem Verhältnis beider Amplituden eine effektive Kopplungskonstante der schwachen WW von  $\alpha_{\text{weak}} \simeq 1 \cdot 10^{-5}$ . Der Wert der Kopplungskonstanten  $\alpha_s$  der starken Wechselwirkung beträgt bei dieser Energie etwa  $\alpha_s \simeq 0.6$ .

Da die Quarks nicht als freie Teilchen beobachtbar sind, ist die Messung der starken Kopplungskonstanten nur indirekt möglich. Das schwerste der drei geladenen Leptonen, das 1975 entdeckte  $\tau$ -Lepton, bietet eine solche Möglichkeit. Anders als die geladenen Mitglieder der leichteren Leptonfamilien, ist das  $\tau$ -Lepton bereits schwer genug, um in Bindungszustände aus einem Quark und einem Antiquark zerfallen zu können (sogenannte hadronische Zerfälle). Der Zerfall geschieht zunächst durch die schwache WW und wird erst durch die starke WW der Quarks im Endzustand zu einem Prozeß, mit dem sich QCD-Parameter messen lassen.

In dieser Arbeit werden die Einflüsse der QCD auf hadronische  $\tau$ -Zerfälle untersucht. Die Häufigkeit, mit der ein Zerfall in ein Hadron einer bestimmten Masse erfolgt, gibt Aufschluß über die Resonanzen, die den Bindungszuständen der Quarks entsprechen. Die QCD ändert aber nicht nur die Form der Massenspektren, sondern auch die gesamte Zerfallsrate. Aus der Abweichung der Anzahl der insgesamt stattfindenden Zerfälle von der erwarteten Anzahl für den Fall, daß die Quarks nicht stark miteinander wechselwirken, kann dann die Kopplungskonstante  $\alpha_s$  der QCD bei der  $\tau$ -Masse bestimmt werden. Betrachtet man das Verhältnis  $R_\tau$  der hadronischen Zerfallsbreite  $\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau \text{Hadronen})$  des  $\tau$ -Leptons und der rein leptonischen Zerfallsbreite  $\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau e \nu_e)$ , fallen durch die Quotientenbildung alle multiplikativen Terme der elektro-schwachen WW weg, und es resultiert eine dimensionslose Observable, in die im wesentlichen die Größe der starken Kopplungskonstanten eingeht.

Inklusive Observablen wie die hadronische Zerfallsrate  $R_\tau$  sind bis zur dritten Ordnung in  $\alpha_s$  berechnet worden. Außer von dem perturbativen Parameter  $\alpha_s$  hängt  $R_\tau$  von nicht-perturbativen Korrekturtermen ab, die die Form der spektralen Momente von  $R_\tau$  (gewichtete Integrale über  $dR_\tau/ds$ , wobei  $\sqrt{s}$  die Masse des hadronischen Systems ist) ändern. Die mit diesen Termen verbundenen theoretischen Unsicherheiten können vermieden werden, wenn man die spektralen Momente von  $R_\tau$  mißt und  $\alpha_s$  zusammen mit den nicht-perturbativen Termen aus einer Anpassung von QCD-Rechnungen an die Momente bestimmt.

Ein besonderes Merkmal der Kopplungskonstanten der drei WW ist, daß sie energieabhängig und keineswegs konstant sind, wie ihr Name verspricht. Je kleiner die Energieskala eines betrachteten Prozesses ist, um so kleiner wird  $\alpha_{\text{QED}}$ , während  $\alpha_s$  immer größer wird. Die Energieabhängigkeit (das „Laufen“) von  $\alpha_s$  für Energieskalen unterhalb der  $\tau$ -Masse kann ebenfalls in hadronischen  $\tau$ -Zerfällen getestet werden, da die Energie, die das im  $\tau$ -Zerfall entstehende  $\tau$ -Neutrino erhält, unterschiedliche Werte zwischen  $\simeq 0$  und  $\simeq m_\tau$  annehmen kann, so daß die den Quarks zur Verfügung stehende Energie zwischen  $\simeq m_\tau$  und  $\simeq 0$  variiert.

Während  $R_\tau$  präzise aus den leptonischen Verzweigungsverhältnissen des  $\tau$ -Leptons und der Lebensdauer des Taus berechnet werden kann, erfordert die Bestimmung von  $dR_\tau/ds$  die Messung der invarianten Masse des hadronischen Systems im Endzustand. Die exklusive Rekonstruktion aller hadronischen Endzustände, die im  $\tau$ -Zerfall auftreten, ist daher notwendig. Insbesondere sind neutrale Pionen, die in zwei Photonen zerfallen, kinematisch zu rekonstruieren, um die Massen der Hadronen, die in geladene und neutrale Pionen zerfallen, zu berechnen.

In dieser Arbeit wird eine Analyse vorgestellt, in der Daten, die mit dem OPAL-Detektor bei

LEP an der  $Z^0$ -Resonanz aufgezeichnet wurden, benutzt werden. Die Analyse beinhaltet Messungen der differentiellen Zerfallsraten  $dR_{\tau,V/A}/ds$  für die Vektor-Zerfälle (V) und Axialvektor-Zerfälle (A) des Taus und ihrer spektralen Momente.

Die gemessenen Momente werden benutzt, um QCD-Vorhersagen an die Daten anzupassen, wobei die starke Kopplungskonstante  $\alpha_s(m_\tau^2)$  und Parameter der nicht-perturbativen QCD extrahiert werden.

Die differentiellen Zerfallsraten können in die Spektralfunktionen des Vektor- und Axialvektorstroms,  $v(s)$  und  $a(s)$ , umgerechnet werden. Sie dienen dem Test von QCD-Summenregeln an der  $\tau$ -Massenskala, indem die experimentell gefundenen Werte mit den Vorhersagen der QCD verglichen werden.

Die theoretischen Grundlagen für die Berechnung inklusiver Observablen in hadronischen  $\tau$ -Zerfällen werden in Kapitel 2 dargestellt. Nach einer kurzen Beschreibung des OPAL-Detektors in Kapitel 3 wird die Rekonstruktion von Photonen aus Zerfällen neutraler Pionen, die in dieser Analyse entwickelt worden ist, in Kapitel 4 vorgestellt. Die Selektion hadronischer  $\tau$ -Zerfälle ist Gegenstand des 5-ten Kapitels. Die Entfaltung der gemessenen Spektren von der endlichen Auflösung des Detektors wird in Kapitel 6 beschrieben. Die gemessenen und entfalteten Spektren sowie deren Anwendungen werden in Kapitel 7 diskutiert. Im Abschnitt 7.1.2 wird die Behandlung systematischer Fehler, die bei der Rekonstruktion der Spektren auftreten, geschildert. Die gemessenen Spektralfunktionen werden in Abschnitt 7.2 vorgestellt. Im Anschluß an Abschnitt 7.3, in dem die Momente von  $R_\tau$  präsentiert werden, behandeln die Abschnitte 7.4 und 7.5 die Bestimmung der starken Kopplungskonstanten  $\alpha_s$  bei der  $\tau$ -Masse sowie die Extrapolation zur Z-Masse und das „Laufen“ von  $\alpha_s$ . Die Messung nicht-perturbativer Korrekturen ist Thema des Abschnitts 7.6. Ein Vergleich der Resultate mit den Ergebnissen anderer Experimente ist in Abschnitt 7.7 zu finden. Die Anwendung der Spektralfunktionen in Form von QCD-Summenregeln wird in Abschnitt 7.8 diskutiert. In Kapitel 8 wird schließlich die Analyse kurz zusammengefaßt.

## 2. QCD in $\tau$ -Zerfällen

Das  $\tau$ -Lepton ist aufgrund seiner hohen Masse  $m_\tau = (1777.00^{+0.30}_{-0.27})$  MeV [1] das einzige Lepton, das sowohl leptonisch ( $\tau^- \rightarrow \nu_\tau l^- \bar{\nu}_l$ ) als auch hadronisch ( $\tau^- \rightarrow \nu_\tau h^-$ ) zerfällt. Vergleicht man das Verhältnis der Zerfallsraten  $\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau h^-)$  und  $\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e)$ , erwartet man im naiven Partonmodell, in dem statt des Hadrons zwei freie Quarks im Endzustand auftreten, daß, entsprechend der Anzahl der Farben, hadronische Zerfälle dreimal häufiger stattfinden als der Zerfall in ein Elektron und Neutrinos. Tatsächlich ist das Verhältnis

$$R_\tau = \frac{\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau h^-)}{\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e)} = \frac{1 - B_e - B_\mu}{B_e}, \quad (2.1)$$

wenn man für die Verzweigungsverhältnisse des Taus in die Endzustände Elektron und Neutrinos,  $B_e$ , sowie Myon und Neutrinos,  $B_\mu$ , die aktuellen Weltmittelwerte einsetzt [1], mit  $R_\tau = 3.635 \pm 0.030$  deutlich größer als der naiv erwartete Wert  $R_{\tau,\text{naiv}} = 3$ . Die Abweichung von etwa 20% ist auf die im Partonmodell vernachlässigten QCD-Strahlungskorrekturen und den Übergang der Quarks in Hadronen zurückzuführen. Dabei ist die Masse des Taus, die die Skala für die relative Stärke der perturbativen Strahlungskorrekturen einerseits und der nicht-perturbativen Hadronisierungseffekte andererseits festlegt, groß genug, um  $R_\tau$  dominant mit störungstheoretischen Methoden beschreiben zu können, während der Anteil nicht-perturbativer QCD-Effekte in  $R_\tau$  klein bleibt, und klein genug, um andererseits sensitiv auf QCD-Effekte zu sein. Wäre das  $\tau$ -Lepton z.B. so schwer wie das  $Z^0$ -Boson, reduzierte sich der Effekt der QCD-Strahlungskorrekturen auf etwa 5%. Die Energieskala, an der QCD-Prozesse nicht mehr durch perturbative Methoden beschrieben werden können, kann mit dem QCD-Skalenparameter  $\Lambda \approx 250$  MeV in Verbindung gebracht werden. Für QCD-Prozesse, in denen der Energieübertrag nahe  $\Lambda$  ist, bricht die Störungstheorie zusammen, da der Entwicklungsparameter der Störungsreihe, die Kopplungskonstante, gegen Unendlich strebt. Die  $\tau$ -Masse ist bereits groß genug, um die Konvergenz der Störungsreihe zu gewährleisten und eine präzise Messung der starken Kopplungskonstanten  $\alpha_s$  zu ermöglichen [2–6].

Die folgenden Abschnitte enthalten eine kurze Beschreibung der theoretischen Aspekte in hadronischen  $\tau$ -Zerfällen sowie der Observablen, die zur Messung von  $\alpha_s$  und einiger nicht-perturbativer QCD-Parameter benutzt werden.

### 2.1 Hadronische $\tau$ -Zerfälle

In hadronischen  $\tau$ -Zerfällen manifestiert sich der Einfluß der QCD in Abweichungen vom naiven Partonmodell und erlaubt damit letztlich eine Messung von  $\alpha_s$ . Um die QCD-Korrekturen von  $R_\tau$  zu bestimmen, muß man das Verhältnis der Zerfallsbreiten für den hadronischen und den

rein leptonischen Tau-Zerfall berechnen:

$$R_\tau = \frac{\left( \begin{array}{c} \Gamma \\ \left( \begin{array}{c} \tau^- \\ \nu_\tau \\ W \\ d' \\ u \\ \text{QCD} \\ \text{Hadronen}^- \end{array} \right) \end{array} \right)}{\left( \begin{array}{c} \Gamma \\ \left( \begin{array}{c} \tau^- \\ \nu_\tau \\ W \\ e^- \\ \nu_e \end{array} \right) \end{array} \right)}, \quad (2.2)$$

wobei  $d' = d \cos \theta_C + s \sin \theta_C$  das mit dem schwachen Mischungswinkel  $\theta_C$  gemischte Quark aus den Massen-Eigenzuständen  $d$  und  $s$  ist. Der Nenner hat in der niedrigsten Ordnung (d.h. ohne elektroschwache Strahlungskorrekturen) den Wert:

$$\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e) = \frac{G_F^2 m_\tau^5}{192\pi^3} = 4.0492 \cdot 10^{-13} \text{ GeV}, \quad (2.3)$$

mit der aus der  $\mu$ -Lebensdauer bestimmten Fermi-Konstanten  $G_F = 1.16639 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$  [1], die als effektive Kopplung von 4 Fermionen den exakten  $W$ -Propagator ersetzt, wenn der Energieübertrag der betrachteten Reaktion deutlich unter der  $W$ -Masse liegt. Das für den Zähler relevante Matrixelement kann durch die Wechselwirkung eines leptonischen und eines hadronischen Stroms beschrieben werden:

$$\mathcal{M}(\tau^- \rightarrow \nu_\tau h^-) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} |V_{ij}| L_\mu H^\mu. \quad (2.4)$$

Der hadronische Endzustand ist durch  $h^-$  gegeben, und  $V_{ij}$  ist das entsprechende Element der CKM-Matrix ( $V_{ud}$  für nicht-seltene Zerfälle und  $V_{us}$  für seltene Zerfälle). Der leptonische Strom ergibt sich aus der  $V-A$ -Struktur der schwachen Wechselwirkung zu:

$$L_\mu = \bar{u}_{\nu_\tau} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_\tau, \quad (2.5)$$

und den hadronischen Strom kann man durch die Erzeugung eines Hadrons aus dem QCD-Vakuum durch einen Erzeugungsoperator  $j_\mu^\dagger(x)$  beschreiben:

$$H^\mu = \langle h | (j^\mu(0))^\dagger | 0 \rangle. \quad (2.6)$$

Aus der  $V-A$ -Struktur der schwachen Wechselwirkung folgt auch für den hadronischen Strom die Aufteilung:

$$j^\mu(x) = v^\mu(x) - a^\mu(x). \quad (2.7)$$

Die sechsfach differentielle Zerfallsbreite des Taus in Hadronen ergibt sich dann nach Summierung über die möglichen Spineinstellungen des Neutrinos  $s_{\nu_\tau}$  sowie über alle möglichen hadronischen Endzustände  $h$  und Mittelung über die Spineinstellungen des Taus  $s_\tau$  zu:

$$d^6\Gamma = \frac{1}{2E_\tau} \frac{1}{2} \sum_{s_\tau, s_{\nu_\tau}} \sum_h |\mathcal{M}|^2 d^6\phi, \quad (2.8)$$

wobei  $E_\tau$  die Energie des  $\tau$ -Leptons ist und der Phasenraum durch  $d^6\phi$  gegeben ist. Setzt man den leptonischen Strom (2.5) in das Matrixelement ein und führt die Spinsummierung aus, folgt:

$$d^6\Gamma = \frac{1}{2m_\tau} \frac{G_F^2}{2} |V_{ij}|^2 L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} d^6\phi, \quad (2.9)$$

mit dem leptonischen Tensor

$$L_{\mu\nu} = 4 \left[ p_\mu p'_\nu - g_{\mu\nu} p p' + p_\nu p'_\mu - i \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p^\lambda p'^\sigma \right], \quad (2.10)$$

dem hadronischen Tensor

$$H^{\mu\nu} = \sum_h \langle 0 | j^\mu(0) | h \rangle \langle h | (j^\nu(0))^\dagger | 0 \rangle \quad (2.11)$$

und dem Phasenraumelement

$$d^6\phi = (2\pi)^4 \delta^4(p - p' - p'') \frac{1}{2p'_0} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p''_0} \frac{d^3p''}{(2\pi)^3}. \quad (2.12)$$

Hier ist  $p = (m_\tau, 0, 0, 0)$  der Viererimpuls des Taus im Ruhesystem des  $\tau$ -Leptons,  $p'$  der Viererimpuls des Neutrinos und  $p''$  der Viererimpuls des hadronischen Systems. Um die Integration über den Phasenraum auszuführen, wird zunächst die Deltafunktion in Integralform geschrieben und die Translationsinvarianz des hadronischen Stroms ausgenutzt:

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^4(p - p' - p'') \langle 0 | j^\mu(0) | h(p'') \rangle \\ &= \int d^4x e^{i(p-p'-p'')x} \langle 0 | j^\mu(0) | h(p'') \rangle \\ &= \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | j^\mu(x) | h(p'') \rangle, \quad \text{mit } q = p - p'. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Der leptonische Tensor hängt nicht von  $p''$  ab, so daß nur  $H^{\mu\nu}$  über den hadronischen Phasenraum integriert werden muß:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p''}{2p''_0} (2\pi)^4 \delta^4(p - p' - p'') H^{\mu\nu} \\ &= \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | j^\mu(x) \sum_h \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p''}{2p''_0} | h \rangle \langle h | (j^\nu(0))^\dagger | 0 \rangle \\ &= \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | j^\mu(x) (j^\nu(0))^\dagger | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Der Ausdruck (2.14) hängt nur noch vom Impulsübertrag  $q = p - p'$  ab und kann in Lorentz-Kovarianten zerlegt werden:

$$\begin{aligned} \rho^{\mu\nu}(q) &= \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | j^\mu(x) (j^\nu(0))^\dagger | 0 \rangle \\ &= (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) \rho^{(1)}(q^2) + q^\mu q^\nu \rho^{(0)}(q^2). \end{aligned} \quad (2.15)$$

In den skalaren (reellen) Funktionen  $\rho^{(J)}(q^2)$  für die Spinzustände  $J = 1$  und  $J = 0$  ist die QCD-Struktur des hadronischen Endzustands enthalten, wobei über alle Größen außer dem Quadrat der Masse des hadronischen Systems integriert worden ist. Setzt man dieses Ergebnis in (2.9) ein und kontrahiert alle Vierervektoren erhält man:

$$\begin{aligned} d^3\Gamma &= \frac{1}{2m_\tau} \frac{G_F^2}{2} |V_{ij}|^2 \frac{1}{2p'_0} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \times \\ &4 \left( [2p_\mu q^\mu p'_\mu q^\mu + q^2 p_\mu p'^\mu] \rho^{(1)}(q^2) + [2p_\mu q^\mu p'_\mu q^\mu - q^2 p_\mu p'^\mu] \rho^{(0)}(q^2) \right) \\ &= \frac{G_F^2}{m_\tau} |V_{ij}|^2 \frac{1}{2p'_0} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \times \\ &\left( m_\tau^2 p'_0 (3m_\tau - 4p'_0) \rho^{(1)}(q^2) + m_\tau^3 p'_0 \rho^{(0)}(q^2) \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Da die Flugrichtung des Neutrinos hier nicht mehr explizit eingeht, kann über die Winkel  $\Omega'$  integriert werden:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p'}{2p'_0} = \frac{p'_0{}^2 dp'_0 d\Omega'}{2p'_0 (2\pi)^3} \rightarrow \frac{p'_0}{(2\pi)^2} dp'_0 = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m_\tau^2 - q^2}{4m_\tau^2} dq^2, \quad (2.17)$$

wobei im letzten Schritt die Energie des Neutrinos durch  $q^2$  ausgedrückt worden ist, da im Ruhesystem des  $\tau$ -Leptons gilt:  $q^2 = (p - p')^2 = m_\tau^2 - 2m_\tau p'_0$ . Das Resultat für die hadronische Zerfallsbreite lautet dann:

$$\Gamma = \frac{G_F^2 m_\tau^5}{32\pi^2} |V_{ij}|^2 \int_0^{m_\tau^2} \frac{dq^2}{m_\tau^2} \left(1 - \frac{q^2}{m_\tau^2}\right)^2 \left[ \left(1 + 2\frac{q^2}{m_\tau^2}\right) \rho^{(1)}(q^2) + \rho^{(0)}(q^2) \right]. \quad (2.18)$$

Der enge Zusammenhang dieser Zerfallsbreite mit der sogenannten Vakuumpolarisation, also der Einsetzung einer Schleife (von z.B. Fermionen) in einen Propagator (z.B. den W-Propagator), ist bereits in Gleichung (2.15) zu sehen. Die Vakuumpolarisation ist nämlich durch das zeitgeordnete Produkt der Operatoren  $j^\mu$  und  $(j^\nu)^\dagger$  gegeben (siehe z.B. [7]):

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(q) &= i \int d^4x e^{iqx} \langle 0|T \left( j^\mu(x) (j^\nu(0))^\dagger \right) |0\rangle \\ &= (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) \Pi^{(1)}(q^2) + q^\mu q^\nu \Pi^{(0)}(q^2). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Hier sind die Funktionen  $\Pi$  komplexwertig, und der Zusammenhang zwischen  $\rho$  und  $\Pi$  kann mit dem optischen Theorem abgeleitet werden, wie im folgenden näher ausgeführt wird.

In Gleichung (2.15) ist wegen der Energieerhaltung  $q_0$  immer positiv, und die rechte Seite darf um die Funktion  $\theta(q_0)$ , die für positive  $q_0$  den Wert 1, sonst den Wert 0 hat, ergänzt werden:

$$\begin{aligned} \rho_+^{\mu\nu}(q) &= \int d^4x e^{iqx} \langle 0|j^\mu(x) (j^\nu(0))^\dagger |0\rangle \\ &= \left[ (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) \rho^{(1)}(q^2) + q^\mu q^\nu \rho^{(0)}(q^2) \right] \theta(q_0). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Analog folgt für den in der Zeit rückwärts laufenden Prozeß:

$$\begin{aligned} \rho_-^{\mu\nu}(q) &= \int d^4x e^{iqx} \langle 0|(j^\nu(0))^\dagger j^\mu(x) |0\rangle \\ &= \left[ (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) \rho^{(1)}(q^2) + q^\mu q^\nu \rho^{(0)}(q^2) \right] \theta(-q_0). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Spaltet man das zeitgeordnete Produkt in der Vakuumpolarisation (2.19) auf, erhält man folgende Amplitudensumme im Ortsraum:

$$\begin{aligned} & \langle 0|T(j^\mu(x)(j^\nu(0))^\dagger)|0\rangle \\ &= \langle 0|\theta(x_0)j^\mu(x)(j^\nu(0))^\dagger + \theta(-x_0)(j^\nu(0))^\dagger j^\mu(x)|0\rangle. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Um wieder in den Impulsraum zu kommen, wird eine Faltung der Fourier-Transformierten der  $\theta$ -Funktion mit den schon bekannten Fourier-Transformierten  $\rho_\pm^{\mu\nu}$  benötigt. Dabei gilt für die  $\theta$ -Funktion:

$$\Theta_\pm(q) = \int d^4x e^{iqx} \theta(\pm x_0) = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{q}) \frac{\pm i}{q_0 \pm i\epsilon}. \quad (2.23)$$

Die Fouriertransformation von (2.22) ist dann das Faltungsintegral:

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(q) &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4q' (\Theta_+(q-q') \rho_+^{\mu\nu}(q') + \Theta_-(q-q') \rho_-^{\mu\nu}(q')) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq'_0 \left( \frac{\theta(q'_0)}{q_0 - q'_0 + i\epsilon} - \frac{\theta(-q'_0)}{q_0 - q'_0 - i\epsilon} \right) \times \\ & \quad \left[ (p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2) \rho^{(1)}(p^2) + p^\mu p^\nu \rho^{(0)}(p^2) \right], \end{aligned} \quad (2.24)$$

mit  $p = (q'_0, \mathbf{q})$ .

Das optische Theorem verknüpft nun den Imaginärteil dieser Amplitude mit dem hadronischen Tensor  $\rho^{\mu\nu}$ , der in der Zerfallsbreite des  $\tau$ -Leptons steht:

$$2 \operatorname{Im} \Pi^{\mu\nu}(q) = i (\Pi^{\mu\nu}(q))^* - i \Pi^{\mu\nu}(q) \stackrel{!}{=} \rho^{\mu\nu}(q). \quad (2.25)$$

Um dies zu zeigen, muß (2.24) in (2.25) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Im} \Pi^{\mu\nu}(q) \\ &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq'_0 \frac{2i\epsilon}{(q_0 - q'_0)^2 + \epsilon^2} \left[ (p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2) \rho^{(1)}(p^2) + p^\mu p^\nu \rho^{(0)}(p^2) \right], \\ & \quad \text{mit } p = (q'_0, \mathbf{q}) \\ &= (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) \rho^{(1)}(q^2) + q^\mu q^\nu \rho^{(0)}(q^2) \\ &= \rho^{\mu\nu}(q). \end{aligned} \quad (2.26)$$

In Abbildung 2.1 sind beide Prozesse graphisch dargestellt. Der praktische Nutzen von (2.25) liegt nun darin, daß die Zerfallsbreite durch den Imaginärteil der Vakuumpolarisation ausgedrückt werden kann und damit das Linienintegral entlang der reellen  $q^2$ -Achse in ein Kreisintegral in der komplexen  $q^2$ -Ebene überführt werden kann, das theoretisch leichter zugänglich ist (siehe Abschnitt 2.2) als das Linienintegral.

Setzt man nun alle Teile zusammen, und normiert die hadronische Zerfallsbreite mit der rein leptonenischen Zerfallsbreite (2.3), nimmt  $R_\tau$  die folgende Form an:

$$\begin{aligned} R_{\tau, V/A} &= \\ 12\pi |V_{ud}|^2 & \int_0^{m_\tau^2} \frac{ds}{m_\tau^2} \left( 1 - \frac{s}{m_\tau^2} \right)^2 \left[ \left( 1 + 2 \frac{s}{m_\tau^2} \right) \operatorname{Im} \Pi_{V/A}^{(1)}(s+i\epsilon) + \operatorname{Im} \Pi_{V/A}^{(0)}(s+i\epsilon) \right]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

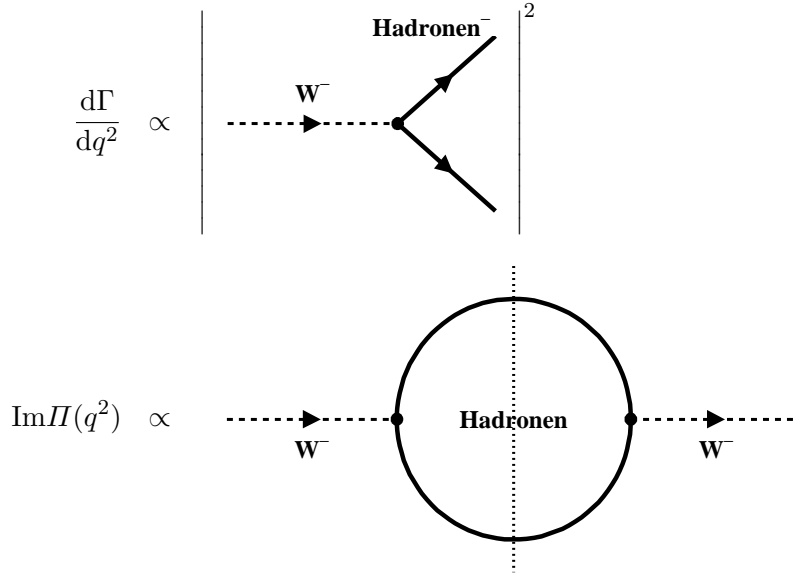


Abbildung 2.1: Graphische Darstellung des optischen Theorems. Das Betragsquadrat der Zerfallsamplitude (im Bild oben) ist dem Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude (unten) proportional. Dabei ist die Schleife im unteren Diagramm mit allen möglichen Hadronen zu durchlaufen. Die punktierte Trennlinie bedeutet, daß nur der imaginäre oder absorptive Teil der Amplitude betrachtet wird, so daß hier die Hadronen in der Schleife reell sind.

Der untere Index V/A steht dabei für die beiden möglichen Ströme, nämlich entweder für den Vektorstrom oder für den Axialvektorstrom. Außerdem ist nur noch die Komponente nicht-seltsamer Zerfälle in (2.27) enthalten, da in dieser Arbeit der kleine Anteil seltsamer Zerfälle (nur  $\sim 5.8\%$  der  $\tau$ -Zerfälle enthalten eine ungerade Anzahl von s-Quarks) nicht betrachtet wird. Der Zusammenhang mit Gleichung (2.1) lautet also:

$$R_\tau = R_{\tau,V} + R_{\tau,A} + R_{\tau,S}, \quad (2.28)$$

wobei  $R_{\tau,S}$  das auf das Verzweungsverhältnis  $B(\tau^- \rightarrow \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e)$  normierte Verzweungsverhältnis  $B(\tau^- \rightarrow \nu_\tau h_s^-)$  des  $\tau$ -Leptons in seltsame Hadronen angibt.

Die Integration läuft nun über die Variable  $s$ , die das Quadrat der Masse des hadronischen Endzustands darstellt und in (2.13) bis (2.26)  $q^2$  entspricht.

Die Spektralfunktionen  $\Pi^{(J)}(s)$  sind analytische Funktionen in der gesamten komplexen  $s$ -Ebene mit Ausnahme der positiven, reellen  $s$ -Achse, auf der die Imaginärteile der Funktionen Sprungstellen aufweisen. Die Konvention ist daher, wie in (2.27) geschehen, die Spektralfunktionen knapp oberhalb der reellen  $s$ -Achse auszuwerten. Eine weitere Eigenschaft der Vakuumpolarisation ist für reelle  $s$  durch die Identität

$$\text{Im}\Pi(s + i\epsilon) = \frac{1}{2i} (\Pi(s + i\epsilon) - \Pi(s - i\epsilon)) \quad (2.29)$$

gegeben, da bis auf reelle Konstanten  $\Pi(s) \propto \ln^n(-s)$  gilt, wie man z.B. für die erste Ordnung in Gleichung (2.37) sieht. Das Integral des Produkts der Funktion  $\Pi(s)$  mit einem Polynom in  $s$ , wobei  $\Pi(s)$  höchstens auf der positiven reellen  $s$ -Achse Polstellen aufweist, über den in Abbildung 2.2 dargestellten Weg, enthält dann keine Polstellen mehr und verschwindet, da



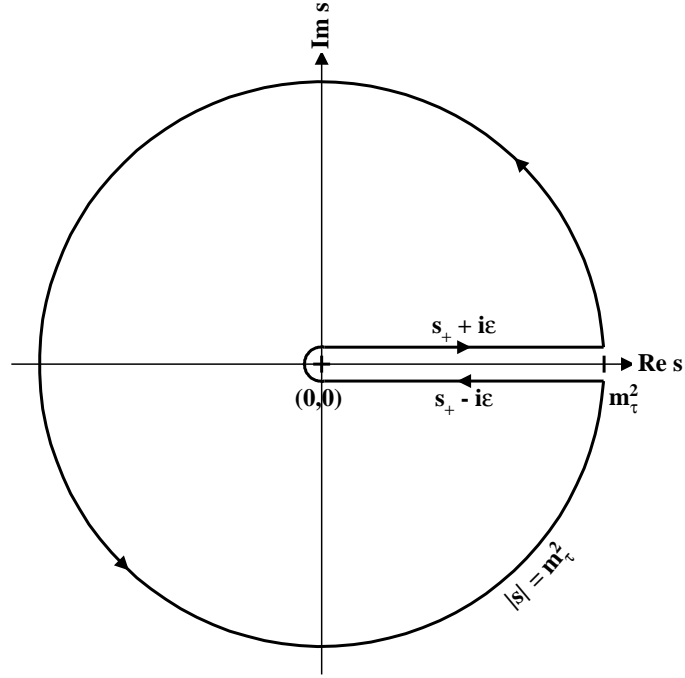


Abbildung 2.2: Die Integrationskontur in der komplexen  $s$ -Ebene für  $R_\tau$ . Der äußere Kreis befindet sich bei  $|s| = m_\tau^2$  und wird gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen. Die Teilwege entlang der reellen  $s$ -Achse sind um  $\pm i\epsilon$  gegen die reelle Achse verschoben und die Bezeichnung  $s_+$  im Bild steht für positive, reelle  $s$ -Werte zwischen 0 und  $m_\tau^2$ .

$\Pi(s)$  analytisch auf dem umrandeten Gebiet ist. Die Summe der Integrale über die Teilwege entlang der reellen, positiven  $s$ -Achse ist dann also gerade gleich dem negativen Wert des bei  $m_\tau^2 + i\epsilon$  beginnenden und gegen den Uhrzeigersinn bis  $m_\tau^2 - i\epsilon$  verlaufenden Kreisintegrals. Aus der Identität (2.29) ergibt sich dann:

$$R_{\tau,V/A} = 6\pi i |V_{ud}|^2 \oint_{|s|=m_\tau^2} \frac{ds}{m_\tau^2} \left(1 - \frac{s}{m_\tau^2}\right)^2 \left[ \left(1 + 2\frac{s}{m_\tau^2}\right) \Pi_{V/A}^{(1)}(s) + \Pi_{V/A}^{(0)}(s) \right], \quad (2.30)$$

wobei der Beitrag an der Schnittstelle mit der reellen  $s$ -Achse bei  $s = m_\tau^2$  durch den Term  $(1 - s/m_\tau^2)^2$  quadratisch unterdrückt ist, so daß tatsächlich über den gesamten Kreis integriert werden darf, auch wenn  $\Pi(s)$  bei  $s = m_\tau^2$  einen Pol haben sollte. Die Beiträge der Integration entlang des Wegs um den Ursprung der komplexen Ebene, der, wie in Abbildung 2.2 dargestellt, die beiden Teilwege entlang der positiven, reellen  $s$ -Achse verbindet, verschwindet ebenfalls, da die Summe  $\Pi^{(0+1)}(s) = \Pi^{(0)}(s) + \Pi^{(1)}(s)$  keinen Pol hat, wenn  $s$  gegen Null geht [5]. Schreibt man nun (2.30) mit dieser Summe als:

$$R_{\tau,V/A} = 6\pi i |V_{ud}|^2 \oint_{|s|=m_\tau^2} \frac{ds}{m_\tau^2} \left(1 - \frac{s}{m_\tau^2}\right)^2 \left[ \left(1 + 2\frac{s}{m_\tau^2}\right) \Pi_{V/A}^{(0+1)}(s) - 2\frac{s}{m_\tau^2} \Pi_{V/A}^{(0)}(s) \right], \quad (2.31)$$

sieht man, daß ein möglicher Pol von  $\Pi^{(0)}(s)$  bei  $s = 0$  durch den Vorfaktor  $2s/m_\tau^2$  unterdrückt wird, so daß die Integration um  $s = 0$  keinen Beitrag liefert. Die perturbativen und nicht-perturbativen Anteile in der Vakuumpolarisation, und damit schließlich in  $R_\tau$ , werden in den folgenden Abschnitten behandelt.

## 2.2 Perturbative Beschreibung der Vakuumpolarisation

Die perturbative Entwicklung der Vakuumpolarisation geht in der niedrigsten Ordnung von reinen Quarkströmen in der Schleife aus, die in den W-Propagator eingesetzt wird. Für den nicht-seltsamen Vektorstrom  $v^\mu(x)$  folgt:

$$v^\mu(x) = \bar{\psi}_u(x)\gamma^\mu\psi_d(x), \quad (2.32)$$

und analog ergibt sich der Axialvektorstrom  $a^\mu(x)$  zu:

$$a^\mu(x) = \bar{\psi}_u(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi_d(x), \quad (2.33)$$

wobei  $\psi_q(x)$  das Feld des Quarks  $q$  im Ortsraum ist. Die Farbzustände der beiden Quarkfelder in den Strömen müssen identisch sein, da hier die Kopplung an den W-Propagator und nicht an ein Gluon betrachtet wird. Das entsprechende Feynman-Diagramm für die Vakuumpolarisation ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Je nachdem, ob der Vektorstrom oder der Axialvektorstrom betrachtet wird, muß für  $\Gamma^\mu$  in dem dargestellten Diagramm  $\gamma^\mu$  oder  $\gamma^\mu\gamma_5$  eingesetzt werden. Für masselose Quarks sind außerdem diese beiden Ströme erhalten, und mögliche Beiträge der Form  $\Gamma^\mu = 1$  für den skalaren Strom und  $\Gamma^\mu = \gamma_5$  für den pseudoskalaren Strom verschwinden.

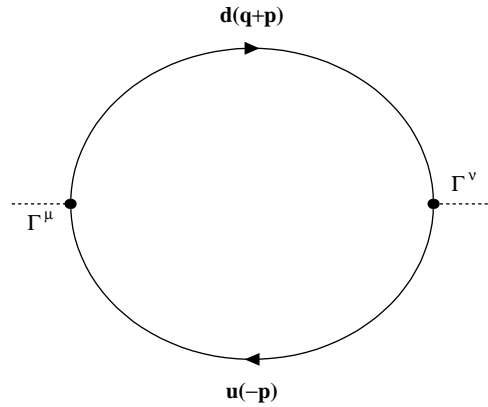


Abbildung 2.3: Vakuumpolarisation des schwachen, geladenen Stroms. Dargestellt ist das Feynman-Diagramm niedrigster Ordnung, das zu  $\Pi^{\mu\nu}(q)$  beiträgt.

Mit Hilfe der sogenannten „dimensionalen Regularisierung“ [8], kann man die in  $D = 4$  Dimensionen in der Schleifenvariablen  $p$  quadratisch divergierenden Amplituden ausrechnen. Das Resultat ist für beide Ströme identisch, wenn man masselose Quarks voraussetzt, und lautet für drei Farben und in  $D = 4 - \epsilon$  Dimensionen:

$$\Pi_{V/A}^{(1)}(q^2)\Big|_{O(\alpha_s^0)} = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln \frac{-q^2}{\mu^2} + \frac{5}{3} \right). \quad (2.34)$$

Die Divergenz steckt hier in dem  $2/\epsilon$ -Term, der erst durch die Renormierung der Kopplungskonstanten verschwindet und  $\gamma = 0.5772\dots$  ist die Eulersche Konstante. Die Größe  $\mu$  ist eine beliebige Referenzmasse, die in der dimensional Regularisierung eingeführt werden muß, damit die Kopplungskonstanten dimensionslos bleiben. Entscheidend ist nun, daß die  $q^2$ -Abhängigkeit der Spektralfunktion von der Form  $\ln -q^2$  ist. Für positive  $q^2$  ist der Imaginärteil des Logarithmus eine Konstante,  $\text{Im} \ln -q^2 = -\pi$ , so daß in niedrigster Ordnung gilt:

$$\text{Im} \Pi_{V/A}^{(1)}(q^2) \Big|_{O(\alpha_s^0)} = \frac{1}{4\pi}. \quad (2.35)$$

Setzt man dies in (2.27) ein, reproduziert man das naiv erwartete Resultat:

$$R_{\tau, V/A} \Big|_{O(\alpha_s^0)} = \frac{3}{2} |V_{ud}|^2. \quad (2.36)$$

QCD-Korrekturen zu diesem Ergebnis erhält man, wenn man Diagramme höherer Ordnung berechnet, wie sie z.B. in Abbildung 2.4 für  $O(\alpha_s)$  dargestellt sind<sup>1</sup>. Unter denselben Annahmen,

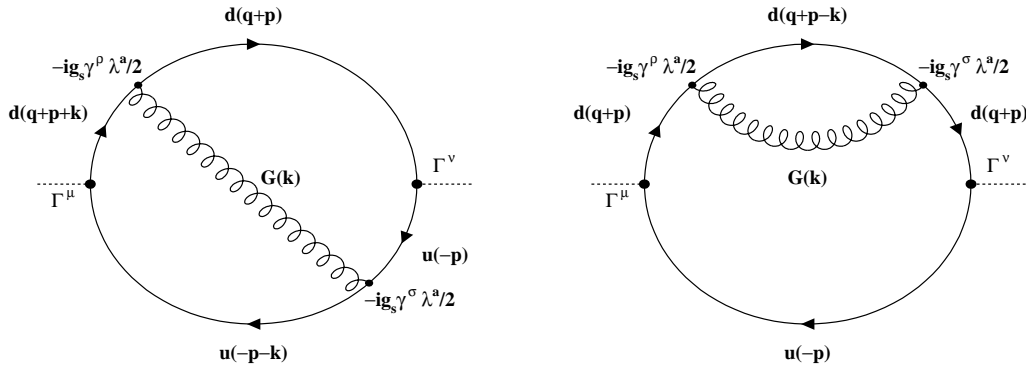


Abbildung 2.4: Strahlungskorrekturen zur Vakuumpolarisation des schwachen, geladenen Stroms. Die dargestellten Feynman-Diagramme enthalten die  $O(\alpha_s = g^2/(4\pi))$ -Korrekturen zu dem Prozeß niedrigster Ordnung aus Abbildung 2.3. Das linke Diagramm enthält den Gluonaustausch zwischen dem u- und dem d-Quark, während auf der rechten Seite der Selbstenergiebeitrag des d-Quarks dargestellt ist. Nicht abgebildet ist der entsprechende Selbstenergiegraph des u-Quarks, der für masselose Quarks aber den gleichen Wert liefert, wie das rechte Diagramm.

die für (2.34) benutzt wurden, erhält man (analog zu dem Resultat für die QED-Vakuumpolarisation [9]):

$$\Pi_{V/A}^{(1)}(q^2) \Big|_{O(\alpha_s)} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln \frac{-q^2}{\mu^2} - 4\zeta(3) + \frac{55}{12} \right). \quad (2.37)$$

Der vorletzte Term enthält die Riemannsche Zeta-Funktion mit  $\zeta(3) = 1.202\dots$  an der Stelle  $n = 3$ . Wie in (2.34), ist die gesamte Dynamik der Spektralfunktion in dem Term  $\ln -q^2$  enthalten, und ihr Imaginärteil (wenn  $\alpha_s(\mu^2)$  reell ist) lautet:

$$\text{Im} \Pi_{V/A}^{(1)}(q^2) \Big|_{O(\alpha_s)} = \frac{1}{4\pi} \frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi}. \quad (2.38)$$

<sup>1</sup> Hier steht der Ausdruck  $O(\alpha_s^n)$  nur für Terme, die proportional zu  $\alpha_s^n$  sind.

Dieses Resultat kann man allerdings nicht sofort in das Linienintegral einsetzen, da die Wahl der Skala  $\mu$ , von der die starke Kopplungskonstante abhängt, unklar ist. Auch die Annahme, daß  $\alpha_s(\mu^2)$  reell ist, muß bei  $\mu^2$ -Werten außerhalb der reellen, positiven Achse nicht mehr stimmen. Um den Zusammenhang physikalischer Observablen mit der Skala, an der  $\alpha_s$  ausgewertet wird, herzustellen, muß man das Verhalten der Kopplungskonstanten als Funktion dieser Skala kennen. Aus der Bedingung, daß physikalische Observablen nicht von der Wahl der Skala  $\mu$  abhängen dürfen, kann man die Kopplungskonstante „renormieren“, also abhängig von  $\mu$  umdefinieren. Daraus gewinnt man eine Renormierungsgruppengleichung, die  $\alpha_s$ -Werte an verschiedenen Skalen miteinander verbindet. Es handelt sich dabei um eine Differentialgleichung, die als Potenzreihe in  $\alpha_s$  geschrieben werden kann und bis zur fünften Ordnung in  $\alpha_s$  aus Schleifen-Korrekturen des Gluonpropagators<sup>2</sup> berechnet worden ist [10]:

$$\beta(\alpha_s) = \mu^2 \frac{d\alpha_s}{d\mu^2} = -\beta_0 a_s^2 - \beta_1 a_s^3 - \beta_2 a_s^4 - \beta_3 a_s^5 + O(a_s^6), \quad (2.39)$$

mit  $a_s = \alpha_s(\mu^2)/(4\pi)$  und den Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 11 - \frac{2}{3}n_f, \\ \beta_1 &= 102 - \frac{38}{3}n_f, \\ \beta_2^{\overline{\text{MS}}} &= \frac{2857}{2} - \frac{5033}{18}n_f + \frac{325}{54}n_f^2, \\ \beta_3^{\overline{\text{MS}}} &= \frac{149753}{6} + 3564\zeta(3) - \left( \frac{1078361}{162} + \frac{6508}{27}\zeta(3) \right) n_f + \\ &\quad \left( \frac{50065}{162} + \frac{6472}{81}\zeta(3) \right) n_f^2 + \frac{1093}{729}n_f^3. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Mit  $n_f$  ist die Anzahl der aktiven Quarksorten im betrachteten Prozeß gemeint, z.B. ist  $n_f = 3$  im  $\tau$ -Zerfall, da hier nur die drei leichten Quarks u, d und s auftreten können. Ab  $\beta_2$  sind die Koeffizienten vom gewählten Renormierungsschema abhängig und hier für das sogenannte „modified Minimal Subtraction“-Schema ( $\overline{\text{MS}}$ )[11] angegeben. Die Festlegung eines bestimmten Renormierungsschemas ist aber willkürlich und wird durch die Variation des dritten Koeffizienten  $\beta_3^{\text{RS}}$  der  $\beta$ -Funktion zwischen 0.0 und  $2.0\beta_2^{\overline{\text{MS}}}$ , wenn man dem in [6] vorgestellten Verfahren folgt, bei der Bestimmung von  $\alpha_s$  berücksichtigt.

Um die Renormierungsgruppengleichung ( $\beta$ -Funktion) auf die Vakuumpolarisation anzuwenden, betrachtet man nun die logarithmische Ableitung der Spektralfunktion, die Adler-Funktion [12], die bis auf Konstanten die gesamte Dynamik des Prozesses enthält:

$$D(-q^2) = -q^2 \frac{d}{dq^2} \Pi_{V/A}^{(1)}(-q^2). \quad (2.41)$$

Aus den beiden Gleichungen (2.34) und (2.37) sowie den höheren Korrekturen ergibt sich:

$$D(-q^2) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \geq 0} K_n(\eta) \left( \frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} \right)^n, \quad (2.42)$$

mit  $\eta = \ln(q^2/\mu^2)$  und den Koeffizienten:

$$K_0(\eta) = K_0 = 1,$$

---

<sup>2</sup> Die Diagramme sind den hier angegebenen für den W-Propagator sehr ähnlich. Die Kopplung an das Gluon erlaubt allerdings keinen Wechsel der Quarksorte, während die Farbzustände beider Quarks unterschiedlich sein müssen, da das Gluon selbst Farbe transportiert.

$$\begin{aligned}
K_1(\eta) &= K_1 = 1, \\
K_2(\eta) &= \frac{299}{24} - 9\zeta(3) - \frac{\beta_0}{4}\eta, \\
K_3^{\overline{\text{MS}}}(\eta) &= \frac{58057}{288} - \frac{779}{4}\zeta(3) + \frac{75}{2}\zeta(5) - \left(\frac{\beta_1}{16} + \frac{\beta_0}{2}K_2(0)\right)\eta + \frac{\beta_0^2}{16}\eta^2, \\
K_4^{\overline{\text{MS}}}(\eta) &= K_4(0) - \left(\frac{\beta_2^{\overline{\text{MS}}}}{64} + \frac{\beta_1}{8}K_2(0) + \frac{3\beta_0}{4}K_3^{\overline{\text{MS}}}(0)\right)\eta + \\
&\quad \left(\frac{5\beta_1\beta_0}{128} + \frac{3\beta_0^2}{16}K_2(0)\right)\eta^2 - \frac{\beta_0^3}{64}\eta^3,
\end{aligned} \tag{2.43}$$

wobei alle Koeffizienten  $K_n$  mit  $n \geq 4$  unbekannt sind. Die Koeffizienten  $K_0(0)$  und  $K_1(0)$  entsprechen den Gleichungen (2.34) und (2.37), während  $K_2(0) = 1.63982\dots$  und  $K_3(0) = 6.37101\dots$  in [13–17] aus entsprechenden Diagrammen höherer Ordnung berechnet worden sind. Für  $K_4(0)$  kann man eine grobe Abschätzung angeben, indem man das Verhältnis der vorhergehenden Koeffizienten betrachtet [18]:

$$K_4(0) \approx \frac{K_3(0)}{K_2(0)}K_3(0) \approx 25. \tag{2.44}$$

Ähnliche Werte für  $K_4(0)$  sind mit anderen Methoden in [19, 20] gefunden worden, aber auch bei diesen handelt es sich nicht um exakte Werte. Zur Abschätzung der Unsicherheit in dieser Ordnung und den ebenfalls vernachlässigten höheren Ordnungen in  $\alpha_s$  ( $K_n = 0$  für  $n \geq 5$ ), wird im folgenden

$$K_4(0) = 25 \pm 50 \tag{2.45}$$

verwendet [19]. Die angenommene relative Unsicherheit von  $\pm 200\%$  entspricht etwa der 1.5-fachen relativen Abweichung von  $K_3(0)$  aus der Abschätzung durch die vorhergehenden Koeffizienten vom exakten Wert und stellt eine eher konservative Abschätzung des Fehlers dar.

Die Abhängigkeit der Koeffizienten von der Skala  $\mu^2$  erhält man aus der Bedingung, daß  $D(-q^2)$  nicht von dieser Größe abhängen darf. Dies ist allerdings nur dann exakt erfüllbar, wenn man die gesamte Störungsreihe berücksichtigt, also  $n$  gegen Unendlich gehen läßt. Schneidet man bereits bei  $n = 4$  die Reihe ab, ergeben sich die von  $\mu^2$  abhängenden Terme durch die Bedingung:

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} D(-q^2, \mu^2) = 0 + O(\alpha_s^5). \tag{2.46}$$

Setzt man (2.42) in (2.46) ein, erhält man:

$$\sum_{n=0}^4 \left[ \left(\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi}\right)^n \frac{dK_n}{d \ln \mu^2} + 4n K_n \left(\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi}\right)^{n-1} \beta(\alpha_s) \right] = 0 + O(\alpha_s^5). \tag{2.47}$$

Da  $\alpha_s$  hier frei gewählt werden darf, muß (2.47) in jeder Ordnung der starken Kopplung verschwinden. Nach dem Einsetzen der  $\beta$ -Funktion (2.39), können die Terme nach Potenzen von  $\alpha_s$  umsortiert werden. Die Vorfaktoren enthalten dann keine Abhängigkeit von  $\alpha_s$  mehr und können bei  $n = 0$  beginnend sukzessive berechnet werden. Es resultieren die  $\eta = \ln(q^2/\mu^2)$ -abhängigen Terme der Koeffizienten  $K_n$ , die in (2.43) bereits angegeben wurden.

Die logarithmische Abhängigkeit der  $K_n$  von  $q^2/\mu^2$  legt die Wahl  $\mu^2 = q^2$  nahe, durch die alle logarithmischen Terme wegfallen. Der perturbative QCD-Anteil der Vakuumpolarisation vereinfacht sich bei  $s = -q^2 = -\mu^2$  zu:

$$D(s) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=0}^4 K_n(0) \left(\frac{\alpha_s(-s)}{\pi}\right)^n. \tag{2.48}$$

Diese Wahl für  $\mu^2$  ist natürlich nicht zwingend, und die Abhängigkeit des Ergebnisses von  $\mu$ , die erst in der vollen Störungsreihe verschwindet, stellt wie der Fehler auf  $K_4$  eine intrinsische Unsicherheit der Theorie dar. Im folgenden wird diese Unsicherheit durch die Variation

$$0.4q^2 < \mu^2 < 2.0q^2, \quad (2.49)$$

die in [6] vorgeschlagen wurde, berücksichtigt.

Observablen, die wie  $R_\tau$  durch ein Kreisintegral über  $\Pi(s)$  und ein Polynom  $g(s)$  in  $s$  gegeben sind, lassen sich dann durch partielle Integration auf ein Kreisintegral über  $D(s)$  und die Stammfunktion von  $g(s)$ ,  $G(s)$ , zurückführen:

$$\begin{aligned} \oint_{|s|=s_0} ds g(s) \Pi(s) &= \oint_{|s|=s_0} \frac{ds}{s} [G(s) - G(s_0)] (-s) \frac{d}{ds} \Pi(s) \\ &= \oint_{|s|=s_0} \frac{ds}{s} [G(s) - G(s_0)] D(s). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Für  $R_{\tau,V/A}$  ist  $s_0 = m_\tau^2$ , das Polynom heißt

$$g(s) = 6\pi i |V_{ud}|^2 \frac{1}{m_\tau^2} \left(1 - \frac{s}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + 2\frac{s}{m_\tau^2}\right) \quad (2.51)$$

und die Stammfunktion lautet

$$G(s) = 3\pi i |V_{ud}|^2 \left(2\frac{s}{m_\tau^2} - 2\frac{s^3}{m_\tau^6} + \frac{s^4}{m_\tau^8}\right). \quad (2.52)$$

Setzt man (2.52) in (2.50) ein, folgt:

$$R_{\tau,V/A} = \frac{3}{2} |V_{ud}|^2 \sum_{n=0}^4 \frac{K_n(0)}{2\pi i} \oint_{|s|=m_\tau^2} \frac{ds}{s} \left(1 - 2\frac{s}{m_\tau^2} + 2\frac{s^3}{m_\tau^6} - \frac{s^4}{m_\tau^8}\right) \left(\frac{\alpha_s(-s)}{\pi}\right)^n. \quad (2.53)$$

Mit diesem Integral hat man nun die perturbative Beschreibung der hadronischen Zerfallsbreite des  $\tau$ -Leptons für masselose Quarks bis zur vierten Ordnung in  $\alpha_s$  gegeben. In den folgenden Abschnitten werden die beiden in dieser Arbeit betrachteten Methoden zur Lösung des Integrals behandelt sowie eine dritte Methode diskutiert, die von einem anderen Ansatz für die Vakuum-polarisation ausgeht. Dabei kann die Diskussion, ausgehend von  $R_\tau$ , auch auf die spektralen Momente von  $R_\tau$  ausgedehnt werden, die dann schließlich zur Messung der starken Kopplungskonstanten verwendet werden. Bei diesen spektralen Momenten handelt es sich wie bei  $R_\tau$  um Integrale der Art (2.50):

$$R_{\tau,V/A}^{kl}(s_0) = \int_0^{s_0} ds \left(1 - \frac{s}{s_0}\right)^k \left(\frac{s}{m_\tau^2}\right)^l \frac{dR_{\tau,V/A}}{ds}, \quad (2.54)$$

die sich von  $R_\tau = R_\tau^{00}(m_\tau^2)$  nur durch das Polynom im Integranden unterscheiden.

### 2.2.1 Berechnung von $R_\tau$ mit „FOPT“

Die Schwierigkeit in der Berechnung des Integrals (2.53) liegt in der Bestimmung der  $\alpha_s$ -Werte auf dem Integrationsweg. In der sogenannten „Fixed Order Perturbation Theory“ (FOPT) drückt man  $\alpha_s(-s)$  mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung durch eine Potenzreihe in  $\alpha_s(s_0)$  bis zu

einer bestimmten Ordnung (maximalen Potenz von  $\alpha_s(s_0)$ ) aus. Die Taylor-Reihe leitet man aus der  $\beta$ -Funktion ab, die, da sie erst mit der zweiten Potenz in  $\alpha_s$  beginnt, nur  $k-2$ -mal abgeleitet werden muß, um alle Terme bis einschließlich der  $k$ -ten Ordnung zu berücksichtigen. Für  $k = 5$  lautet die Taylor-Entwicklung von  $\alpha_s(-s)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_s(-s)}{\pi} &= \frac{\alpha_s(s_0)}{\pi} - \frac{1}{4}\beta_0 \ln \frac{-s}{s_0} \left( \frac{\alpha_s(s_0)}{\pi} \right)^2 + \\ &\frac{1}{16} \left( \beta_0^2 \ln^2 \frac{-s}{s_0} - \beta_1 \ln \frac{-s}{s_0} \right) \left( \frac{\alpha_s(s_0)}{\pi} \right)^3 - \\ &\frac{1}{128} \left( 2\beta_0^3 \ln^3 \frac{-s}{s_0} - 5\beta_0\beta_1 \ln^2 \frac{-s}{s_0} + 2\beta_2 \ln \frac{-s}{s_0} \right) \left( \frac{\alpha_s(s_0)}{\pi} \right)^4 + \\ &\frac{1}{1536} \left( 6\beta_0^4 \ln^4 \frac{-s}{s_0} - 26\beta_0^2\beta_1 \ln^3 \frac{-s}{s_0} + \right. \\ &\left. 9(\beta_1^2 + 2\beta_0\beta_2) \ln^2 \frac{-s}{s_0} - 6\beta_3 \ln \frac{-s}{s_0} \right) \left( \frac{\alpha_s(s_0)}{\pi} \right)^5. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Setzt man diese Entwicklung für  $\alpha_s(-s)$  in das Integral (2.53) ein und vernachlässigt wieder ab einer bestimmten Ordnung die höheren Potenzen in  $\alpha_s$ , kann man das Integral als Potenzreihe in  $\alpha_s(s_0)$  bis zu dieser Ordnung schreiben, wobei die Vorfaktoren durch elementar lösbare Integrale gegeben sind:

$$\begin{aligned} I_{nm}(s_0) &= \oint_{|s|=s_0} \frac{ds}{s} s^n \ln^m \frac{-s}{s_0} = i^{m+1} s_0^n \int_0^{2\pi} d\varphi e^{in\varphi} (\varphi - \pi)^m \quad (2.56) \\ I_{nm}(s_0) &= \begin{cases} \frac{2(i\pi)^{m+1}}{m+1}, & n=0, m \text{ gerade} \\ 0, & n=0, m \text{ ungerade} \\ \frac{s_0^n}{n} \sum_{k=0}^m \binom{-1}{n}^k \frac{m!(i\pi)^{m-k}}{(m-k)!} (1 - (-1)^{m-k}), & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.57) \end{aligned}$$

Für das Moment mit  $kl = 00$  ergibt sich z.B. an der Stelle  $s_0 = m_\tau^2$  die Potenzreihe:

$$\begin{aligned} R_{\tau,V/A}^{00}(m_\tau^2) &= \frac{3}{2} |V_{ud}|^2 \left( 1 + \frac{\alpha_s(m_\tau^2)}{\pi} + 5.2023 \frac{\alpha_s^2(m_\tau^2)}{\pi^2} + 26.366 \frac{\alpha_s^3(m_\tau^2)}{\pi^3} + \right. \\ &\quad [78.003 + K_4(0)] \frac{\alpha_s^4(m_\tau^2)}{\pi^4} + \\ &\quad \left. [-391.542 + 14.25 K_4(0) + K_5(0)] \frac{\alpha_s^5(m_\tau^2)}{\pi^5} \right). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Die Vorfaktoren für die anderen Momente bestimmt man entsprechend auch aus den  $I_{nm}(s_0)$ . An der Art, wie die Koeffizienten gewonnen werden, erkennt man auch die Limitierung von FOPT. Die Taylor-Entwicklung der  $\alpha_s$ -Werte auf dem Kreis kann teilweise zu großen Abweichungen von dem „exakten“ Wert führen, den man durch schrittweises Lösen der  $\beta$ -Funktion auf dem Kreis erhält. In Abbildung 2.5 ist ein Vergleich der Real- und Imaginärteile von  $\alpha_s$  auf dem Kreis aus der Taylor-Entwicklung um  $\alpha_s(m_\tau^2)$  bis zur vierten Ordnung einerseits und der exakten Lösung andererseits dargestellt. Man erkennt deutlich, daß besonders der Realteil bei großen Abständen des Winkels von  $\varphi = 0$  durch die Taylor-Entwicklung schlecht beschrieben wird.

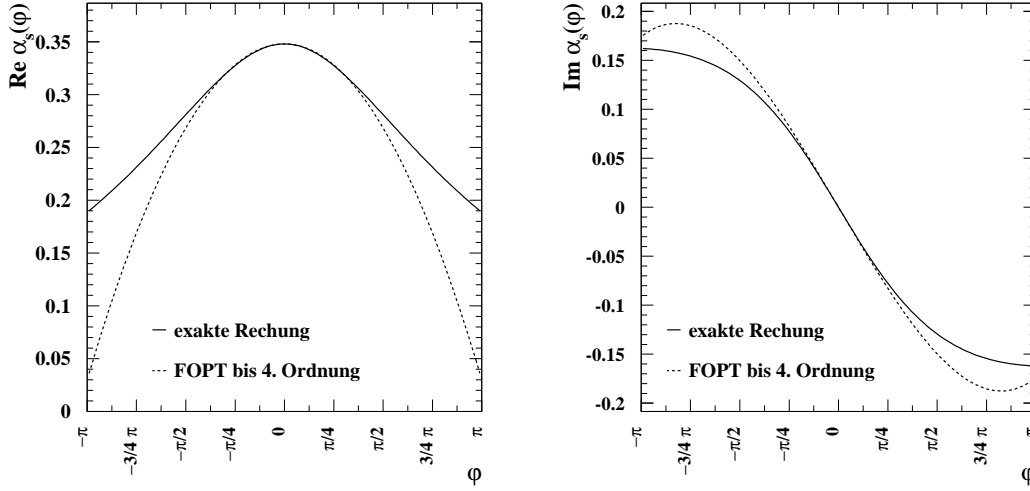


Abbildung 2.5: Güte der Taylor-Entwicklung von  $\alpha_s(m_\tau^2 e^{i\varphi})$ . Dargestellt sind der Realteil von  $\alpha_s$  (links) und der Imaginärteil von  $\alpha_s$  (rechts) gegen den Winkel  $\varphi$ . Die durchgezogene Linie zeigt das „exakte“ Resultat und die gestrichelte Linie die Taylor-Entwicklung um  $\varphi = 0$  bis zur vierten Ordnung in  $\alpha_s(m_\tau^2) = 0.348$ .

## 2.2.2 Berechnung von $R_\tau$ mit „CIPT“

Möchte man auf die exakte Entwicklung der Kopplungskonstanten auf dem Kreis nicht verzichten, muß man die Kreisintegrale über Potenzen von  $\alpha_s(-s)$  und das Polynom numerisch lösen. Diese Methode heißt „Contour Improved Perturbation Theory“ (CIPT) [6]. Im Sinne der in Abschnitt 2.2.1 vorgestellten Taylor-Entwicklung von  $\alpha_s(-s)$  werden hier teilweise höhere Ordnungen in der Integration berücksichtigt, die, wie in Abbildung 2.5 gezeigt, nicht vernachlässigbar klein sind. Für die Momente  $R_{\tau,V/A}^{kl}(s_0)$  ergeben sich bei CIPT die Integrale [6]:

$$A_n^{kl}(s_0) = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{1}{\pi i} \oint_{|s|=s_0} \frac{ds}{s} \frac{\alpha_s^n(-s)}{\pi^n} \left\{ \frac{x_0^{l+1}}{m+l+1} - \frac{3x_0^{l+3}}{m+l+3} + \frac{2x_0^{l+4}}{m+l+4} - x_0^{-m} \left[ \frac{x^{m+l+1}}{m+l+1} - \frac{3x^{m+l+3}}{m+l+3} + \frac{2x^{m+l+4}}{m+l+4} \right] \right\}, \quad (2.59)$$

mit  $x_0 = s_0/m_\tau^2$  und  $x = s/m_\tau^2$ , so daß die perturbative Entwicklung der Momente durch die Summe

$$R_{\tau,V/A}^{kl}(s_0) = \frac{3}{2} |V_{ud}|^2 \sum_{n=0}^4 K_n(0) A_n^{kl}(s_0) \quad (2.60)$$

gegeben ist. Auch diese Summe bricht bei  $n = 4$  ab und enthält in den  $\alpha_s(-s)$ -Termen nur die ersten vier Koeffizienten der  $\beta$ -Funktion. Um die  $A_n^{kl}$  für verschiedene Werte von  $\alpha_s(m_\tau^2)$  numerisch zu lösen, geht man wie in (2.56) vor, und formt die Integration über  $s$  entlang des Kreises  $s = s_0 e^{i\varphi}$  in eine Integration über  $\varphi$  von 0 bis  $2\pi$  um. Aus der  $\beta$ -Funktion (2.39) erhält man für  $\alpha_s(-s) \equiv \alpha_s(\varphi - \pi)$  auf dem Kreis die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\pi} \frac{d\alpha_s(\varphi - \pi)}{d\varphi} = -i \sum_{n=0}^3 \frac{\beta_n}{4^{n+1}} \frac{\alpha_s^{n+2}(\varphi - \pi)}{\pi^{n+2}}, \quad (2.61)$$



die man in kleinen  $\Delta\varphi$ -Schritten entlang des Kreises mit einem Runge-Kutta-Verfahren (siehe z.B. [21]) lösen kann. Damit läßt sich der Integrand an jeder Stelle des Kreises ausrechnen und die Summe der Integranden multipliziert mit  $\Delta\varphi$  ergibt das gesuchte Integral.

Im Sinne einer strikten Formulierung der Störungstheorie bis zu einer festen Ordnung in der Kopplungskonstanten, ist CIPT allerdings nicht konsequent. Während bei FOPT ausschließlich Terme bis zur vierten Ordnung auftreten, sind alle Terme höherer Ordnung in der Entwicklung von  $\alpha_s(-s)$  um  $\alpha_s(s_0)$  bei CIPT enthalten, obwohl die Summe in (2.60), wie bei FOPT, nur bis zur vierten Ordnung läuft. Beide Methoden sind durch die fehlenden Terme höherer Ordnung in ihrer Genauigkeit limitiert und es ist zunächst unklar, ob ihre teilweise Berücksichtigung in der Entwicklung von  $\alpha_s$  auf dem Kreis bei CIPT genauere Resultate liefert als FOPT.

### 2.2.3 Berechnung von $R_\tau$ mit „RCPT“

Sowohl FOPT als auch CIPT basieren auf demselben Ansatz für die Vakuumpolarisation  $\Pi^{\mu\nu}$ , in dem nach Potenzen der Kopplungskonstanten geordnet, Ordnung für Ordnung, alle beitragenden Diagramme ausgerechnet und aufsummiert werden, um dann bei einer bestimmten Ordnung in  $\alpha_s$  abzubrechen. Fügt man z.B. in den Diagrammen 2.4 in den Gluonpropagator eine Fermionschleife ein, erhält man Diagramme der zweiten Ordnung in  $\alpha_s$ . Diagramme desselben Typs mit  $n$  eingesetzten Fermionschleifen gehören zur  $n+1$ -ten Ordnung und lassen sich systematisch aus der Einsetzung nur einer Fermionschleife berechnen. Auch die Summe aller Diagramme dieses Typs von  $n = 1$  bis  $n = \infty$  läßt sich berechnen. Diese Form der Summierung über Ketten von Fermionschleifen im Gluonpropagator nennt man „Renormalon Chain Perturbation Theory“ (RCPT). Im Gegensatz zu FOPT und CIPT tragen jetzt unendlich viele Ordnungen zum Resultat bei. Allerdings ist die Summe nicht vollständig, sondern enthält, da man die Einsetzung einer Fermionschleife in den Gluonpropagator mit dem ersten Koeffizienten der  $\beta$ -Funktion  $\beta_0$  identifizieren kann, nur die Anteile, die proportional zu  $\beta_0^n$  sind. In Abbildung 2.6 ist der modifizierte Gluonpropagator für eine Schleife, zwei Schleifen und  $n$  Schleifen dargestellt. Formal kann man diese Resummierung durch eine Umorganisation der  $K_n$  in (2.48) beschreiben [22]:

$$K_n = \kappa_n \beta_0^{n-1} + \kappa_n^{(n-2)} \beta_0^{n-2} + \dots + \kappa_n^{(1)} \beta_0 + \kappa_n^{(0)}. \quad (2.62)$$

Da  $\beta_0 = 9$  für  $n_f = 3$  Quarksorten groß ist, kann man erwarten, daß in dieser Summe der Term mit der höchsten Potenz in  $\beta_0$ ,  $\kappa_n \beta_0^{n-1}$ , bereits den dominanten Beitrag für  $K_n$  liefert. Dieser Beitrag kommt von einem Diagramm, in dem der Gluonpropagator  $n-1$  Fermionschleifen enthält<sup>3</sup>. Die resummierte Adler-Funktion in allen Ordnungen von  $\alpha_s$  lautet, wenn man sich auf die Beiträge in der führenden Ordnung in  $\beta_0$  beschränkt:

$$D(s)_{\text{res}} = \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \beta_0^{n-1} \frac{\alpha_s^n}{\pi^n}. \quad (2.63)$$

Allerdings wachsen die Koeffizienten  $\kappa_n$  mit  $n!$  an, und die Summe (2.63) ist divergent. Mit einer Borel-Transformation, die diesen  $n!$ -Faktor unterdrückt, und daher ein besseres Konvergenzverhalten aufweist, kann man  $D(s)_{\text{res}}$  als Integral darstellen:

$$\tilde{D}(b) = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_{n+1} \frac{(4b)^n}{n!} \quad (2.64)$$

$$D(s)_{\text{res}} = \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2 \beta_0} \int_0^{\infty} db \tilde{D}(b) \exp \frac{-4\pi b}{\beta_0 \alpha_s}, \quad (2.65)$$

<sup>3</sup> Zu den Diagrammen, die zu  $\alpha_s^n \beta_0^{n-1}$  beitragen, gehören auch solche, die weniger als  $n-1$  Fermionschleifen enthalten, da auch der durch eine Gluonschleife modifizierte Gluonpropagator in  $\beta_0$  eingeht. Beiträge dieser Art werden also ebenfalls resummiert.

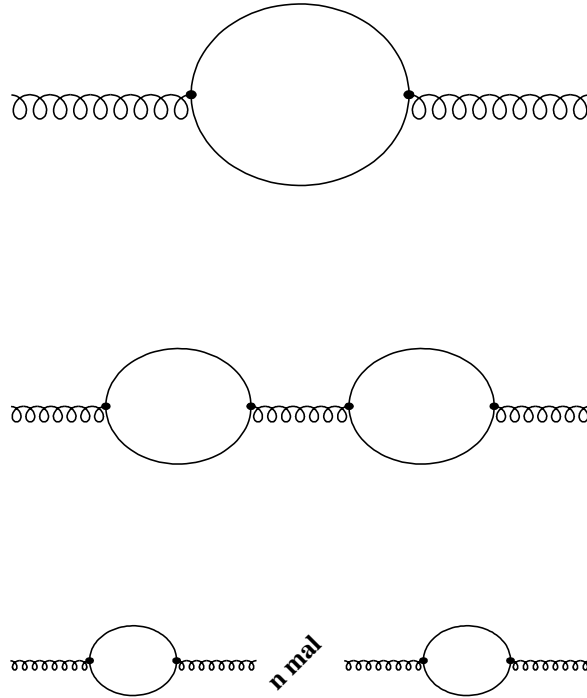


Abbildung 2.6: Einsetzungen für den Gluonpropagator, die (von oben) proportional zu  $\beta_0$ ,  $\beta_0^2$  und  $\beta_0^n$  sind. Die Aufsummierung aller Diagramme 2.4 mit Einsetzungen dieses Typs für den Gluonpropagator von  $n = 1$  bis  $n = \infty$  ersetzt bei RCPT die in FOPT und CIPT nach Ordnungen in  $\alpha_s$  getrennt berechnete Störungsreihe für die Spektralfunktion.

so daß die Koeffizienten  $\kappa_n$  durch die  $n-1$ -te Ableitung von  $\tilde{D}(b)$  an der Stelle  $b = 0$  gegeben sind:

$$\kappa_n = \frac{1}{4^{n-1}} \left. \frac{d^{n-1}}{db^{n-1}} \tilde{D}(b) \right|_{b=0}. \quad (2.66)$$

Das Integral (2.65) ist natürlich genauso divergent wie die Summe (2.63), aber die Borel-Transformierte läßt sich berechnen [23–25]:

$$\tilde{D}(b) = \frac{32}{3} \frac{e^{5b/3}}{2-b} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k k \left[ k^2 - (1-b)^2 \right]^{-2}. \quad (2.67)$$

Die Divergenz von (2.63) steckt nun in den Singularitäten von  $\tilde{D}(b)$ , die bei  $b = -1, \pm 2, \pm 3, \dots$  auftreten (siehe Abbildung 2.7). Dabei stammen die Singularitäten auf der negativen  $b$ -Achse von der Integration über große Beträge des Gluonimpulses und heißen wegen des ultraviolett-divergenten Verhaltens UV-Renormalons, während die Singularitäten auf der positiven  $b$ -Achse von den Beiträgen kleiner Gluonimpulse in den Feynman-Diagrammen herrühren, die wegen des infrarot-divergenten Verhaltens IR-Renormalons genannt werden. Für die Adler-Funktion sind besonders die IR-Renormalons interessant, da diese auf dem Integrationsweg von (2.65) liegen.

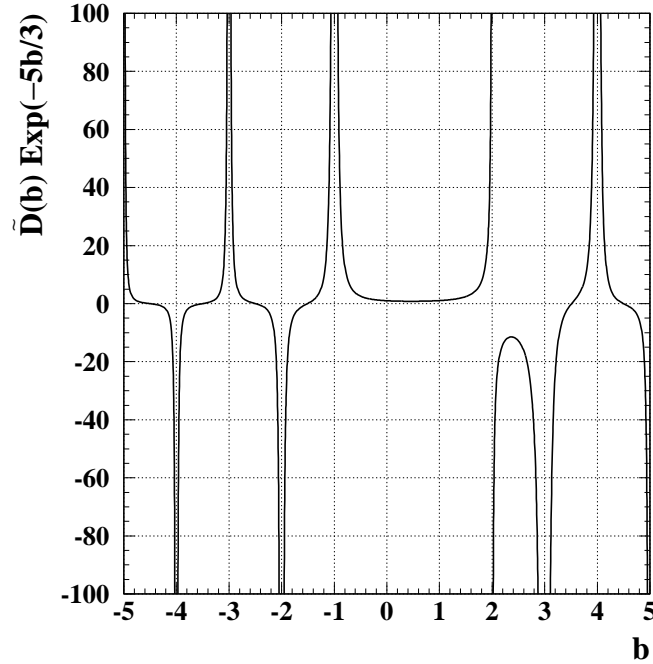


Abbildung 2.7: Die Borel-Transformierte  $\tilde{D}(b)$  der Adler-Funktion  $D(s)_{\text{res}}$ . Die Funktion besitzt Polstellen bei  $b = -1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , die für positive  $b$  den IR-Renormalons und für negative  $b$  den UV-Renormalons entsprechen. Der Faktor  $e^{-5b/3}$  in der gezeigten Funktion vereinfacht lediglich die Darstellung und ändert die Lage der Pole nicht.

Die Pole auf der positiven  $b$ -Achse können regularisiert werden, indem man an den Polstellen  $b_n = n$  auf die Halbkreise  $|b - b_n| = \epsilon$ , mit  $\text{Im}(b) > 0$  oder  $\text{Im}(b) < 0$  in der komplexen  $b$ -Ebene ausweicht. Da es je zwei mögliche Halbkreise gibt, auf die man ausweichen kann, ist das Resultat nicht eindeutig. Für jede Polstelle  $b_n$  kann man die Differenz der beiden Halbkreisintegrale, also das Kreisintegral um den Pol, als Ambiguität in der Regularisierung interpretieren. Für den  $n$ -ten Pol ergibt sich damit die Ambiguität [22]

$$\Delta D(s)_{\text{res}}^{(n)} = \frac{1}{\pi^2 \beta_0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|b-n|=\epsilon} db \tilde{D}(b) \exp \frac{-4\pi b}{\beta_0 \alpha_s} = \frac{1}{\pi^2 \beta_0} \text{Res} \left[ \tilde{D}(n) \exp \frac{-4\pi n}{\beta_0 \alpha_s} \right], \quad (2.68)$$

die durch das Residuum der Borel-Transformierten gegeben ist. Setzt man hier für  $\alpha_s$  die integrierte  $\beta$ -Funktion in der Näherung  $\beta_k = 0$  für  $k > 0$  ein:

$$\alpha_s = \frac{4\pi}{\beta_0} \ln^{-1} \frac{s}{\Lambda^2}, \quad (2.69)$$

folgt für die Renormalonambiguitäten<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned} \Delta D(s)_{\text{res}}^{(2)} &\propto \frac{\Lambda^4}{s^2}, \\ \Delta D(s)_{\text{res}}^{(3)} &\propto \frac{\Lambda^6}{s^3}, \end{aligned}$$

<sup>4</sup> Da  $\tilde{D}(b)$  bei  $b = +1$  keinen Pol hat, existiert keine Ambiguität, die zu  $1/s$  proportional ist.

$$\begin{aligned} \Delta D(s)_{\text{res}}^{(4)} &\propto \frac{\Lambda^8}{s^4}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.70}$$

Diese Ambiguitäten lassen sich bis in die Momente von  $R_\tau$  fortsetzen und müssen durch nicht-perturbative Korrekturterme kompensiert werden. Im Rahmen der Operator-Produkt-Entwicklung (OPE), die im nächsten Abschnitt beschrieben wird, ergeben sich gerade solche Terme, die zu inversen Potenzen von  $s$  proportional sind, als nicht-perturbative Korrekturen. Die Korrespondenz beider Ansätze wird auch dadurch bestärkt, daß sowohl in der OPE als auch bei den Renormalons Terme fehlen, die proportional zu  $1/s$  sind, während in beiden Fällen Terme mit höheren Potenzen in  $1/s$  auftreten.

Die hier beschriebenen Ambiguitäten der perturbativen Entwicklung zeigen weiter, daß nur die Summe der perturbativen und nicht-perturbativen Anteile zu einem eindeutigen Resultat führen kann. Eine Bestimmung der Kopplungskonstanten aus den Momenten von  $R_\tau$  muß also unbedingt simultan mit einer Bestimmung nicht-perturbativer Parameter erfolgen.

In [22, 26, 27] sind speziell für die Momente von  $R_\tau$  die Beiträge der Renormalonketten als Funktion der Kopplungskonstanten  $\alpha_s$  berechnet worden. In diesen Resummierungen treten zunächst nur Terme proportional zu  $\beta_0^n$  auf, während das FOPT Resultat bis zur dritten Ordnung in  $\alpha_s$  auch die zu  $\beta_1$  und zu nicht-führenden Potenzen in  $\beta_0$  proportionalen Beiträge enthält. Beide Entwicklungen lassen sich kombinieren, indem man FOPT und RCPT addiert und eine Taylor-Entwicklung von RCPT bis zur dritten Ordnung in  $\alpha_s$  abzieht, um diesen Anteil nicht doppelt zu zählen [22]. Die RCPT Resultate im Kapitel 7 beziehen sich auf diese FOPT-korrigierte Version der Renormalon-Resummierung.

### 2.3 Operator-Produkt-Entwicklung

Die Diskussion der Renormalonambiguitäten im vorhergehenden Abschnitt hat gezeigt, daß die Spektralfunktionen  $\Pi(q^2)$  durch Beiträge kleiner Impulsüberträge in den Feynman-Diagrammen nicht mehr eindeutig mit perturbativen Methoden zu berechnen sind. Eine exakte Theorie der nicht-perturbativen Prozesse, die bei diesen kleinen Skalen dominant werden, fehlt allerdings. Der Mechanismus, der zu Quark-Bindungszuständen in Form von Mesonen und Baryonen führt, ist bisher nur mit phänomenologisch motivierten Modellen zu beschreiben und nicht direkt aus der Lagrange-Dichte der QCD abzuleiten. Für inklusive Observablen, wie z.B.  $R_\tau$ , gibt es aber Ansätze, in denen eine systematische Trennung der perturbativen Effekte, die hohen Impulsüberträgen und kleinen Abständen zuzuordnen sind, von nicht-perturbativen Effekten, die kleinen Impulsüberträgen und großen Abständen entsprechen, versucht wird.

In [28–30] wird mit Hilfe der Operator-Produkt-Entwicklung [31] (OPE) der Vakuumerwartungswert eines zeitgeordneten Produkts zweier Ströme (siehe (2.19)) untersucht. Mit Vakuumerwartungswerten lokaler Operatoren, die aus Quark- und Gluonfeldern konstruiert werden können, kann man das  $T$ -Produkt der Ströme  $j_\mu(x)$  und  $j_\nu^\dagger(0)$  als Summe schreiben [5]:

$$\Pi^{(J)}(s) = \sum_{D=0,2,4,\dots} \frac{1}{(-s)^{D/2}} \sum_{\dim \mathcal{O}=D} \mathcal{C}^{(J)}(s, \tilde{\mu}) \langle \mathcal{O}(\tilde{\mu}) \rangle. \tag{2.71}$$

Die äußere Summe läuft hier über die (Energie-)Dimension  $D$  der Operatoren  $\mathcal{O}$ , während die innere Summe alle Operatoren mit derselben Dimension aufsummiert. Der Term mit der Dimension  $D=0$  ist das bereits bekannte perturbative Resultat für masselose Quarks, das in (2.34) und (2.37) explizit bis zur ersten Ordnung in  $\alpha_s$  angegeben wurde. Für die Klassifizierung der nächsten Terme ist es sinnvoll, die QCD-Lagrange-Dichte zu betrachten, aus der die möglichen

Operatoren konstruiert werden sollen.

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - ig_s\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\lambda_a}{2}\psi\right)G_\mu^a. \quad (2.72)$$

Der erste Term der Lagrange-Dichte beschreibt die Bewegung freier Gluonen mit dem Feldstärketensor

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f_{abc}G_\mu^b G_\nu^c, \quad (2.73)$$

den man aus den Gluonfeldern  $G_\mu^a$  erhält, wobei der dritte Term von der Selbstkopplung der Gluonen stammt. Freie Quarks werden durch den zweiten Summanden in der Lagrange-Dichte beschrieben und ihre Wechselwirkung mit den Gluonen durch den dritten. Alle Summanden haben in Energieeinheiten die Dimension  $D=4$  und damit haben auch die ersten nicht-trivialen Operatoren, die in (2.71) eingehen diese Dimension. Die beiden einfachsten  $D=4$ -Operatoren sind der Quarkoperator  $m\bar{\psi}\psi$  und der Gluonoperator  $G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}$ . In der perturbativen QCD verschwinden nun die Vakuumerwartungswerte solcher Operatoren und in Gleichung (2.71) bliebe nur der Summand mit  $D=0$  übrig<sup>5</sup>, während umgekehrt nicht-verschwindende Vakuumerwartungswerte, sogenannte „Kondensate“, auf Effekte nicht-perturbativen Ursprungs schließen lassen. Die physikalische Interpretation dieser Effekte hat mit dem Verhalten von Quarks und Gluonen bei großen Abständen, und damit bei kleinen Impulsüberträgen zu tun. In [28] wird eine Faktorisierungsskala  $\tilde{\mu}$  eingeführt, die den perturbativen Bereich vom nicht-perturbativen trennt. Die Wilson-Koeffizienten  $\mathcal{C}(s, \tilde{\mu})$ , die in (2.71) vor den Kondensaten  $\langle\mathcal{O}(s, \tilde{\mu})\rangle$  stehen, enthalten dann den rein perturbativen Anteil, während alle nicht-perturbativen Effekte durch die Kondensate parametrisiert werden. Dabei werden die langreichweitigen Effekte durch eine Taylor-Entwicklung der Felder auf Vakuumerwartungswerte lokaler Operatoren zurückgeführt. In diagrammatischer Form ist dies in Abbildung 2.8 für die Beiträge des Quark- und des Gluonkondensats gezeigt. Die von einem Kreuzpaar unterbrochenen Linien bedeuten, daß ein Teilchen an dieser Stelle ins Vakuum annihiliert wird und an derselben Stelle wieder erzeugt wird (es „kondensiert“). Der Rest des Diagramms kann mit den üblichen Feynman-Regeln berechnet werden und ergibt den perturbativen Vorfaktor zu dem Kondensat. Die Konstruktion weiterer Kondensate geschieht durch das Auftrennen aller möglichen Quark- und Gluonlinien in den perturbativen Diagrammen höherer Ordnung, wobei die aufgetrennten Linien durch das entsprechende Kondensat ersetzt werden. Dabei muß nur gewährleistet bleiben, daß mindestens eine interne Linie die beiden äußeren Vertizes, die die Quarks an das W koppeln, verbindet.

Eine exakte Beschreibung von Resonanzeffekten ist auch mit der OPE nicht möglich, sondern die Entwicklung (2.71) ist nur bis zu einer bestimmten Dimension gültig. Die Kondensate in den niedrigen Dimensionen stellen aber eine einfache Möglichkeit dar, um nicht-perturbative Effekte in verschiedenen Prozessen auf einige wenige universelle Parameter zurückzuführen. Das hier auftretende Quarkkondensat kann man z.B. im Pionzerfall wiederfinden und mit der Zerfallskonstanten des Pions  $f_\pi = (92.42 \pm 0.26) \text{ MeV}$  [1] in Verbindung bringen [32]:

$$2m_\pi^2 f_\pi^2 = -(m_u + m_d) \langle 0 | \bar{\psi}_u \psi_u + \bar{\psi}_d \psi_d | 0 \rangle. \quad (2.74)$$

Der Zusammenhang der Momente von  $R_\tau$  und der hier vorgestellten OPE der Vakuumpolarisation ist durch den Integralsatz von Cauchy herzustellen. Setzt man die Entwicklung (2.71) in die Konturintegrale des Typs (2.30) ein, wobei für das Moment  $kl$  die in (2.54) definierten Polynome hinzuzufügen sind, kann man  $R_{\tau,V/A}^{kl}(s_0)$  als folgende Summe schreiben:

$$R_{\tau,V/A}^{kl}(s_0) = \frac{3}{2}|V_{ud}|^2 \left( 1 + \delta_{\text{pert}}^{kl}(s_0) + \sum_{D=2,4,6,\dots} \delta_{V/A}^{D,kl}(s_0) \right). \quad (2.75)$$

<sup>5</sup> Für massive Quarks bleibt auch der  $D=2$ -Term bestehen, der aber, wie der  $D=0$ -Term, rein perturbativen Ursprungs ist.

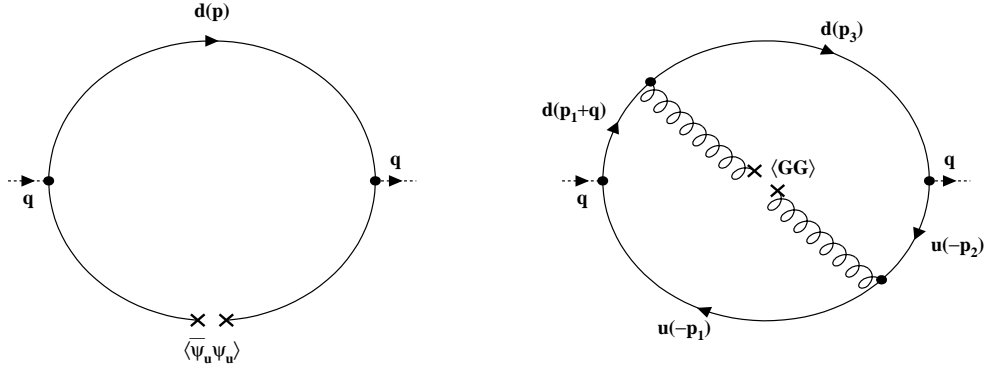


Abbildung 2.8: Typische Diagramme, die in der OPE die perturbativen Koeffizienten vor dem Quarkkondensat (links) und dem Gluonkondensat (rechts) liefern.

Die perturbativen Korrekturen  $1 + \delta_{\text{pert}}^{kl}$  sind bereits in (2.59) und (2.60) angegeben worden. Vernachlässigt man in den Summanden von (2.71) die  $s$ -Abhängigkeit der Wilson-Koeffizienten und der Operatoren, kann man die Integration auf dem Kreis explizit ausführen, wobei für jedes Moment mit dem Index  $kl$  nur die Terme der OPE übrigbleiben, die nach der Multiplikation mit dem Polynom proportional zu  $1/s$  sind [18].

$$\begin{aligned}
 \delta_{V/A}^{D,kl}(s_0) = & 8\pi^2 \begin{pmatrix} D=2 & D=4 & D=6 & D=8 & D=10 & kl \\ 1 & 0 & -3 & -2 & 0 & 00 \\ 1 & \frac{m_\tau^2}{s_0} & -3 & -2 - 3\frac{m_\tau^2}{s_0} & -2\frac{m_\tau^2}{s_0} & 10 \\ 0 & -1 & -\frac{m_\tau^2}{s_0} & 3 & 2 + 3\frac{m_\tau^2}{s_0} & 11 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{m_\tau^2}{s_0} & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{m_\tau^2}{s_0} & 13 \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\dim O = D} \frac{\mathcal{C}_{V/A}(\tilde{\mu}) \langle \mathcal{O}(\tilde{\mu}) \rangle}{m_\tau^D}. \quad (2.76)
 \end{aligned}$$

Jedes Element dieser Matrix entspricht einem  $\delta_{V/A}^{D,kl}$ , wobei die Zeile über der Matrix die Dimension  $D$  angibt und in der Spalte neben der Matrix die Indizes  $kl$  für die in dieser Arbeit betrachteten Momente von  $R_\tau$  stehen. Die höchste in  $R_\tau^{kl}$  vorkommende Dimension ist  $D = 8 + k + l$  und die niedrigste Dimension (abgesehen von  $D = 0$ ) ist  $D = 2 + l$ . In [18] ist daher vorgeschlagen worden, die Momente mit den Indizes  $kl = 00, 10, 11, 12$  und  $13$  gemeinsam zu messen. Schneidet man nämlich die OPE bei  $D = 8$  ab, und vernachlässigt alle Terme mit höheren Dimensionen, kann aus den je fünf Momenten für den Vektor- und den Axialvektorstrom die notwendige Information gewonnen werden, um  $\alpha_s$  und die Terme der Dimension  $D = 4, 6$  und  $8$  zu bestimmen.

Die perturbative Massenkorrektur  $\delta_{V/A}^{2,kl}$  ist für die hier betrachteten nicht-seltsamen Zerfälle sehr klein und kann unter Berücksichtigung der  $s$ -Abhängigkeit aus den Quarkmassen  $m_{u,d,s}$  und  $\alpha_s$  berechnet werden [5, 18].

Auch für  $D = 4$  ist in [5, 18] die  $s$ -Abhängigkeit der Wilson-Koeffizienten und der Operatoren berücksichtigt worden. Diese Korrektur hängt von  $\alpha_s$ , den Quarkmassen, den Kondensaten der drei leichten Quarks  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{u,d,s}$  und dem Gluonkondensat  $\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle$  ab. Wie in (2.74) zu sehen ist, sind die Quarkkondensate aus dem Zerfall der leichten pseudoskalaren Mesonen zu bestimmen,

und daher sehr genau bekannt, während das Gluonkondensat, das mit QCD-Summenregeln aus dem Charmoniumzerfall ausgerechnet werden kann [29], oder, wie in dieser Analyse, als Korrektur der Vakuumpolarisation durch leichte Quarks auftritt, nur zu etwa 50% bekannt ist.

Für die Korrekturen in den Dimensionen  $D = 6$  und  $D = 8$  wird die  $s$ -Abhängigkeit im folgenden vernachlässigt und mit den Beziehungen (2.76) alle  $\delta_{V/A}^{6/8,kl}(s_0)$  durch die vier Parameter  $\delta_{V/A}^{6/8,00}(m_\tau^2)$  ausgedrückt. Die freien Parameter, die im Kapitel 7 aus dem Vergleich der gemessenen Momente mit den hier vorgestellten perturbativen und nicht-perturbativen QCD-Rechnungen bestimmt werden sollen, lauten also:

$$\alpha_s(m_\tau^2); \quad \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \right\rangle; \quad \delta_V^{6,00}; \quad \delta_A^{6,00}; \quad \delta_V^{8,00}; \quad \delta_A^{8,00}. \quad (2.77)$$

## 2.4 Elektroschwache Korrekturen

Die vollständige Form für die Momente von  $R_\tau$  erhält man, wenn (2.75) um elektroschwache Strahlungskorrekturen, die in die Zerfallsbreiten der Prozesse  $\tau \rightarrow \nu_\tau q_i q_j$  und  $\tau \rightarrow \nu_\tau \nu_e e$  unterschiedlich stark eingehen und daher das Verhältnis der Zerfallsbreiten ändern, erweitert.

Zu unterscheiden sind hier Beiträge, die durch die Abstrahlung reeller Photonen von den geladenen Fermionen im Endzustand herrühren und Beiträge durch den Austausch virtueller Photonen und  $Z^0$ -Bosonen zwischen den geladenen Fermionen des Endzustands bzw. die Selbstwechselwirkung der geladenen Fermionen über diese Austauschteilchen. Normalerweise sind Korrekturen dieser Art sehr klein und können vernachlässigt werden. In [33–35] sind Korrekturen der leptonischen und der semihadronischen  $\tau$ -Zerfallsbreite berechnet worden, wobei für die Korrekturen der semihadronischen Zerfallsbreite durch den Austausch virtueller Photonen und  $Z^0$ -Bosonen überraschend große Werte ( $\sim 2\%$  [35]) gefunden wurden.

Die Korrekturen teilt man schließlich in einen multiplikativen Term [33]

$$S_{EW} = \left( \frac{\alpha(m_b)}{\alpha(m_\tau)} \right)^{9/19} \left( \frac{\alpha(m_W)}{\alpha(m_b)} \right)^{9/20} \left( \frac{\alpha(m_Z)}{\alpha(m_W)} \right)^{36/17} = 1.0194, \quad (2.78)$$

in den die Kopplungskonstante der QED bei der  $\tau$ -Masse  $\alpha(m_\tau) = 1/133.29$ , der b-Quark-Masse  $\alpha(m_b) = 1/132.05$ , der W-Boson-Masse  $\alpha(m_W) = 1/127.97$  und der Z-Boson-Masse  $\alpha(m_Z) = 1/127.93$  [5] eingehen und der sowohl die Diagramme niedrigster Ordnung als auch die Diagramme der QCD-Strahlungskorrekturen gleichermaßen beeinflusst, und einen additiven Term [35]

$$\delta'_{EW} = \frac{5}{12} \frac{\alpha(m_\tau)}{\pi} = 0.0010, \quad (2.79)$$

der wie die QCD-Strahlungskorrekturen und die nicht-perturbativen Beiträge einem weiteren separaten Graphen entspricht, auf. Die Momente von  $R_\tau$  lauten dann:

$$R_{\tau,V/A}^{kl}(s_0) = \frac{3}{2} S_{EW} |V_{ud}|^2 \left( 1 + \delta'_{EW}{}^{kl}(s_0) + \delta_{\text{pert}}^{kl}(s_0) + \sum_{D=2,4,6,\dots} \delta_{V/A}^{D,kl}(s_0) \right). \quad (2.80)$$

Der additive Term  $\delta'_{EW}{}^{kl}(s_0)$  ist allerdings nur für  $kl = 00$  und  $s_0 = m_\tau^2$  berechnet worden. Für die höheren Momente oder andere Werte von  $s_0$  wird angenommen, daß dieser Term mit dem Integral über die Polynome in (2.54) und (2.27) skaliert und damit dasselbe Verhalten wie die Korrektur in der ersten Ordnung der starken Kopplungskonstanten aufweist:

$$\delta_{EW}^{\prime kl}(s_0) = \delta'_{EW} \frac{R_{\tau,naiiv}^{kl}(s_0)}{R_{\tau,naiiv}^{00}(m_\tau^2)} = 2\delta'_{EW} \int_0^{s_0} \frac{ds}{m_\tau^2} \left( 1 - \frac{s}{s_0} \right)^k \left( \frac{s}{m_\tau^2} \right)^l \left( 1 - \frac{s}{m_\tau^2} \right)^2 \left( 1 + 2 \frac{s}{m_\tau^2} \right). \quad (2.81)$$

## 2.5 QCD-Summenregeln

Im masselosen Limes ( $m_u = m_d = 0$ ) für die beiden leichtesten Quarksorten ist die in (2.72) angegebene Lagrange-Dichte symmetrisch unter globalen Transformationen, die die Quarksorte der links- und rechtshändigen Quarks ändern, wobei die Händigkeit der Quarks durch die Anwendung des Projektionsoperators

$$\mathcal{P}_{L/R} = \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \quad (2.82)$$

auf die Quarkfelder  $\psi_{u,d}$  festgelegt wird. Allgemein heißt das, daß für  $n_f$  Quarksorten, eine Transformation  $g$ , die zu der Gruppe  $SU(n_f)_L \otimes SU(n_f)_R$  gehört, die Lagrange-Dichte unverändert läßt. Die Transformationen  $g$  lassen sich durch die  $a = 1, \dots, n_f^2 - 1$  Erzeugenden  $t_a$  der Gruppe  $SU(n_f)$  ausdrücken (hier für infinitesimal kleine Transformationen):

$$\psi_{i,L/R} \xrightarrow{g} \psi_{i,L/R} + i\epsilon_{L/R}^a (t_a)^{ij} \psi_{j,L/R}, \quad i = 1, \dots, n_f. \quad (2.83)$$

Mit diesen Symmetrietransformationen sind nach dem Noether-Theorem erhaltene links- und rechtshändige Ströme

$$j_{a,L}^\mu = \bar{\psi}_{i,L} \gamma^\mu (t_a)^{ij} \psi_{j,L} = v_a^\mu - a_a^\mu, \quad (2.84)$$

$$j_{a,R}^\mu = \bar{\psi}_{i,R} \gamma^\mu (t_a)^{ij} \psi_{j,R} = v_a^\mu + a_a^\mu \quad (2.85)$$

verbunden, die sich aus dem Vektorstrom

$$v_a^\mu = \bar{\psi}_i \gamma^\mu (t_a)^{ij} \psi_j \quad (2.86)$$

und dem Axialvektorstrom

$$a_a^\mu = \bar{\psi}_i \gamma^\mu \gamma_5 (t_a)^{ij} \psi_j \quad (2.87)$$

zusammensetzen. Tatsächlich sind aber die Ströme (2.84) und (2.85) nicht erhalten, und die postulierte chirale  $SU_L(2) \otimes SU_R(2)$ -Symmetrie ist gebrochen. Die Existenz von drei leichten pseudoskalaren Mesonen, nämlich  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  und  $\pi^0$ , sowie das Fehlen von entsprechenden skalaren Teilchen kann man nun damit erklären, daß zwar der Vektorstrom (2.86) erhalten ist, nicht aber der Axialvektorstrom (2.87). Die drei pseudoskalaren Mesonen entsprechen dann den  $n_f^2 - 1 = 3$ , für  $n_f = 2$ , Goldstone-Bosonen, die mit der Divergenz des Axialvektorstroms zusammenhängen, und die Erhaltung des Vektorstroms entspricht einer  $SU_{L+R}(2) = SU_V(2)$ -Symmetrie. Nimmt man nun an, daß asymptotisch, für große Impulsüberträge, die ursprüngliche  $SU_L(2) \otimes SU_R(2)$ -Symmetrie wieder hergestellt wird, kann man Summenregeln aufstellen, in denen diese Symmetrie zwischen den Spektralfunktionen des Vektorstroms und des Axialvektorstroms ausgenutzt wird. Betrachtet man z.B. die Vakuumpolarisation

$$\Pi_{LR}^{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T (j_L^\mu(x) (j_R^\nu(0))^\dagger) | 0 \rangle \quad (2.88)$$

durch einen linkshändigen Strom

$$j_L^\mu = \bar{\psi}_u \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_d \quad (2.89)$$

und einen rechtshändigen Strom

$$j_R^\mu = \bar{\psi}_u \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \psi_d, \quad (2.90)$$



so muß im asymptotischen Limes ( $q^2 \rightarrow \infty$ ) gelten:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{LR}}^{\mu\nu}(q) &= (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) \left( \Pi_{\text{V}}^{(1)}(q^2) - \Pi_{\text{A}}^{(1)}(q^2) \right) + q^\mu q^\nu \left( \Pi_{\text{V}}^{(0)}(q^2) - \Pi_{\text{A}}^{(0)}(q^2) \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Aus der Analytizität der Spektralfunktionen, die bereits zur Verwandlung des Linienintegrals von  $R_\tau$  über die Imaginärteile in ein Kreisintegral über die Funktion selbst geführt hat, folgt die Dispersionsrelation:

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\text{Im}\Pi(s)}{s + q^2}. \quad (2.92)$$

Wendet man diese Relation jeweils auf die zu  $q^\mu q^\nu$  und  $g^{\mu\nu}$  proportionalen Terme in (2.91) an, erhält man die Weinberg-Summenregeln [36]:

$$0 = \int_0^\infty ds \left( \text{Im}\Pi_{\text{V}}^{(1)}(s) - \text{Im}\Pi_{\text{A}}^{(1)}(s) + \text{Im}\Pi_{\text{V}}^{(0)}(s) - \text{Im}\Pi_{\text{A}}^{(0)}(s) \right), \quad (2.93)$$

$$0 = \int_0^\infty ds s \left( \text{Im}\Pi_{\text{V}}^{(1)}(s) - \text{Im}\Pi_{\text{A}}^{(1)}(s) \right). \quad (2.94)$$

Gleichung (2.93) ist die erste Weinberg-Summenregel, die noch weiter vereinfacht werden kann, und Gleichung (2.94) ist die zweite Weinberg-Summenregel.

Aus der Erhaltung des Vektorstroms (CVC) [37] folgt, daß es keinen Beitrag zu  $\Pi_{\text{V}}^{(0)}(s)$  gibt, und aus der partiellen Erhaltung des Axialvektorstroms (PCAC) [38] folgt, daß  $\Pi_{\text{A}}^{(0)}(s)$  durch den Pion-Pol beschrieben werden kann:

$$\text{Im}\Pi_{\text{A}}^{(0)}(s) = 2\pi f_\pi^2 \delta(s - m_\pi^2). \quad (2.95)$$

Wendet man CVC und PCAC auf die erste Weinberg-Summenregel an, erhält man:

$$\int_0^\infty ds \left( \text{Im}\Pi_{\text{V}}^{(1)}(s) - \text{Im}\Pi_{\text{A}}^{(1)}(s) \right) = 2\pi f_\pi^2. \quad (2.96)$$



## 3. Das Experiment

Dieser Arbeit liegen Daten zugrunde, die in den Jahren 1990 bis 1995 mit dem OPAL-Detektor am Elektron-Positron-Speicherring LEP am CERN in Genf aufgezeichnet wurden. Der Speicherring und der Detektor sollen in diesem Kapitel kurz beschrieben werden.

### 3.1 Der LEP-Speicherring

Im Jahre 1989 ist am europäischen Forschungszentrum für Teilchenphysik CERN bei Genf der Elektron-Positron-Speicherring LEP (**L**arge **E**lectron **P**ositron **C**ollider) (siehe Abbildung 3.1), der gleichzeitig Elektronen und Positronen in entgegengesetzten Richtungen beschleunigt, in Betrieb genommen worden. Die fast kreisförmige Anlage befindet sich etwa 100 m unter der Erdoberfläche und hat einen Umfang von 26.7 km.

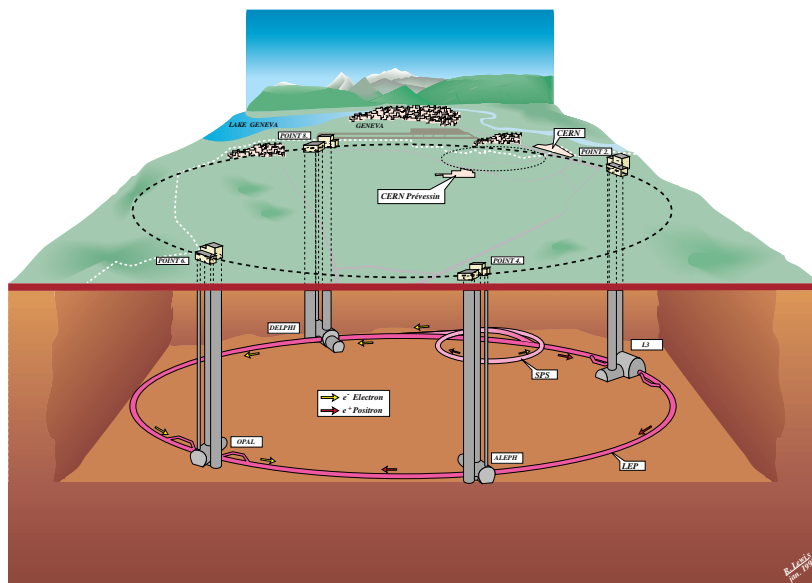


Abbildung 3.1: Der LEP-Speicherring.

In der ersten Ausbaustufe (LEP-I), die von 1989 bis 1995 dauerte, ist LEP mit dem Ziel betrieben worden, die  $Z^0$ -Resonanz um  $m_Z = 91.2 \text{ GeV}$  zu erforschen. Elektronen und Positronen müssen dafür auf jeweils  $45.6 \text{ GeV}$  beschleunigt werden, um dann in einer Vernichtungsreaktion bei der Kollision reelle  $Z^0$ -Bosonen erzeugen zu können.

Vier Großdetektoren, ALEPH, DELPHI, OPAL und L3 nutzen je eine der vier Wechselwirkungszone, in denen die Elektronen und Positronen zur Kollision gebracht werden. Pro Experiment sind dabei bis zum Ende der LEP-I-Phase  $4.25 \cdot 10^6$   $Z^0$ -Zerfälle nachgewiesen worden. Die in dieser Arbeit analysierten Daten entstammen dieser Datenmenge.

Seit 1995 ist LEP durch den Einbau supraleitender Kavitäten sukzessive zu immer höheren

Schwerpunktenergien, bei denen schließlich die Erzeugung reeller W-Paare ( $\sqrt{s} > 160 \text{ GeV}$ ) und reeller  $Z^0$ -Paare ( $\sqrt{s} > 183 \text{ GeV}$ ) möglich sind, ausgebaut worden. Bis etwa zum Jahr 2000 wird LEP bei Schwerpunktenergien zwischen 193 GeV und 200 GeV weiter betrieben.

### 3.2 Der OPAL-Detektor

Eine detaillierte Beschreibung des OPAL-Detektors (**O**mnipurpose **P**urpose **A**pparatus for **L**EP) findet man in [39]. Die für diese Analyse relevanten Komponenten des Detektors sowie ihre wichtigsten Eigenschaften werden im folgenden kurz vorgestellt.

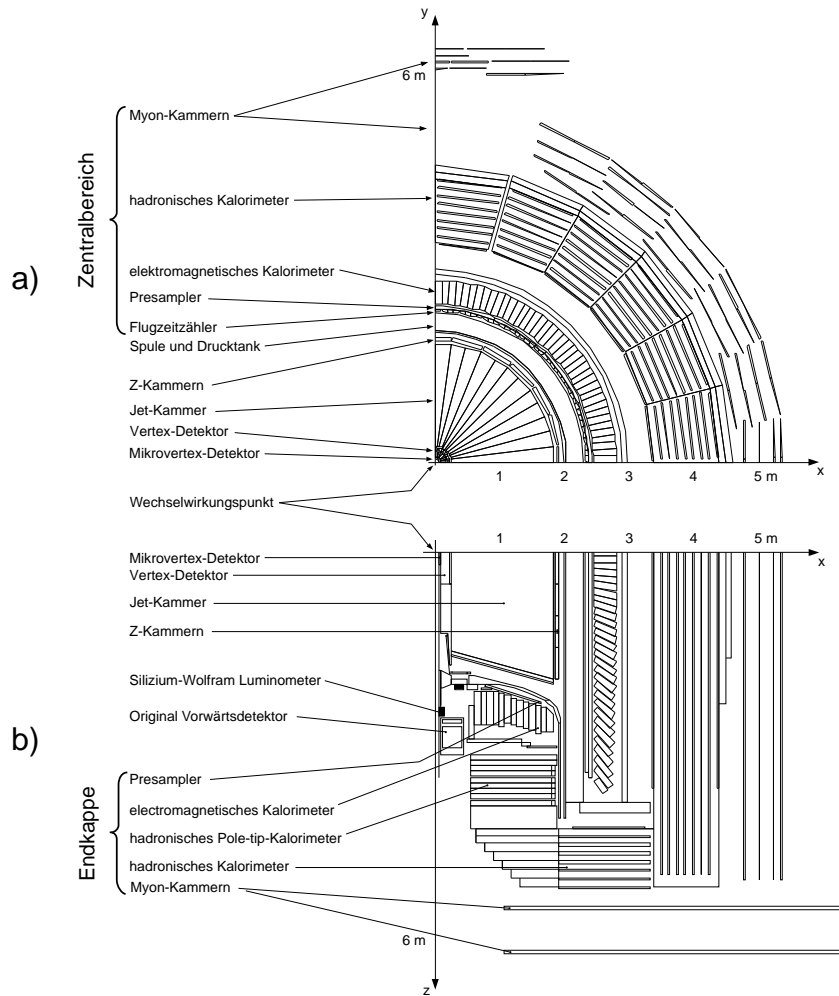


Abbildung 3.2: Der OPAL-Detektor. Bild a) zeigt einen Schnitt in der  $r$ - $\varphi$ -Ebene durch den Detektor. Bild b) zeigt einen Schnitt in der  $x$ - $z$ -Ebene durch den Detektor.

**Silizium-Mikrovertex-Detektor** Der Silizium-Mikrovertex-Detektor befindet sich zwischen dem inneren und dem äußeren Strahlrohr im Abstand von 6.0 cm und 7.5 cm von der Strahlachse. Der 1991 eingebaute Detektor bestand aus zwei zylindrischen Lagen einseitiger Siliziumstreifen-zähler, die eine Auflösung von  $5 \mu\text{m}$  bis  $6 \mu\text{m}$  in der  $r$ - $\varphi$ -Ebene<sup>1</sup> erreichten. 1993 ist dieser Detektor durch doppellagige Schichten einseitiger Siliziumstreifen-zähler ersetzt

<sup>1</sup> Im OPAL-Koordinatensystem zeigt die horizontale  $x$ -Achse in Richtung der Mitte von LEP. Die  $y$ -Achse verläuft vertikal, und die  $z$ -Achse zeigt in die  $e^-$ -Strahlrichtung.

worden, die neben der Koordinatenmessung in der  $r$ - $\varphi$ -Ebene pro Lage eine  $z$ -Messung zur Verfügung stellen.

Der Mikrovertexdetektor dient vor allem der Rekonstruktion des Primärvertex und der Messung der Zerfallsvertizes kurzlebiger Teilchen.

**Zentraldetektor** Der Zentraldetektor von OPAL besteht aus drei Driftkammersystemen: dem Vertex-Detektor, der Jet-Kammer und den  $Z$ -Kammern:

**Vertex-Detektor** Der Vertex-Detektor ist eine 1 m lange zylindrische Driftkammer deren Innenradius 8.8 cm und deren Außenradius 23.5 cm beträgt. Er befindet sich zwischen dem Silizium-Mikrovertex-Detektor und der Jet-Kammer und besteht aus zwei Komponenten, die senkrecht zur Strahlachse in jeweils 36 Sektoren unterteilt sind. Im inneren Teil der 36 Sektoren sind je 12 Axialdrähte parallel zur Strahlachse gespannt. Der äußere Teil der 36 Sektoren enthält je 6 „Stereodrähte“, die mit der  $z$ -Achse einen Winkel von  $4^\circ$  einschließen. Diese Verdrehung erlaubt eine genaue Messung der  $z$ -Ordinate. Die mittlere Ortsauflösung des Vertex-Detektors beträgt  $55 \mu\text{m}$  in der  $r$ - $\varphi$ -Ebene und  $700 \mu\text{m}$  in  $z$ -Richtung, unter Benutzung der Stereodrähte [40].

Dieser Detektorteil dient der genauen Rekonstruktion des primären Wechselwirkungspunktes ebenso wie dem Auffinden von Sekundärvertizes schwach zerfallender, kurzlebiger Teilchen, wie z.B. Mesonen, die  $c$ - oder  $b$ -Quarks enthalten.

**Jet-Kammer** Einer der Hauptbestandteile des OPAL-Detektors ist die zylindrische Jet-Kammer, die einen inneren Radius von 25 cm, einen äußeren Radius von 185 cm und eine Länge von 4 m hat. Die Jet-Kammer ist eine Drift-Kammer und dient der Impulsmessung, der Bestimmung des Ladungsvorzeichens und der Ortsmessung geladener Teilchen. Sie spielt eine wesentliche Rolle bei der geometrischen Rekonstruktion von Ereignissen. Darüber hinaus können mit dem spezifischen Energieverlust  $dE/dx$  im Kammergas Teilchen identifiziert werden. Sie ist senkrecht zur Strahlachse in 24 Sektoren eingeteilt, so daß jeder Sektor  $15^\circ$  überdeckt. Damit erhält man Driftstrecken von bis zu 25.5 cm. Zwei benachbarte Sektoren werden durch eine Ebene von Kathodendrähten voneinander getrennt. In der Mitte jeder dieser Sektoren wechseln sich je einer der 159 Anodendrähte (oder Signaldrähte) und einer der 160 Potentialdrähte ab, die parallel zur Strahlachse gespannt sind. Die Jet-Kammer wird von konischen Endstücken begrenzt. Da die Drähte zwischen diesen konisch geformten Aluminiumplatten eingespannt sind, variiert ihre Länge und damit auch die Länge der Kammer zwischen 3.44 m (innerer Draht) und 4.12 m (äußerer Draht). Durch die Anordnung der Potential-, Anoden- und Kathodendrähte erreicht man ein homogenes elektrisches Feld und damit eine konstante Driftgeschwindigkeit sowie einen konstanten Lorentz-Winkel  $\alpha_L$ . Um die Links-Rechts-Mehrdeutigkeit der Spuren aufzulösen, sind die Signaldrähte abwechselnd um  $+100 \mu\text{m}$  bzw.  $-100 \mu\text{m}$  gegen die Symmetrieebene versetzt angeordnet. Das Kammergas besteht aus eine Mischung von Argon (88.2%), Methan (9.8%) und Isobutan (2.0%). Der Druck in der Kammer beträgt 4.0 bar.

Über Vorverstärker und schnelle FADC (100 MHz Analog-Digital-Wandler) werden die auf den Signaldrähten erzeugten Pulse an beiden Drahtenden ausgelesen und digitalisiert. Die gemessenen Driftzeiten legen die  $r$ - $\varphi$ -Koordinaten der Teilchenspuren fest und die  $z$ -Ordinaten können aus der Ladungsteilung auf den Signaldrähten bestimmt werden. In der  $r$ - $\varphi$ -Ebene wird eine mittlere Ortsauflösung von  $135 \mu\text{m}$  und in  $z$ -Richtung von 6 cm erreicht [41]. Die Summe der an den beiden Drahtenden gemessenen Ladungsmengen wird zur Bestimmung des Energieverlustes  $dE/dx$  im Kammergas

benötigt. Für minimal ionisierende Pionen beträgt die relative Genauigkeit dieser Messung etwa 3.8 %, wenn 159 Meßpunkte vorliegen.

Das von der Spule erzeugte, 0.435 T starke Magnetfeld reicht aus, um auch die Bahnen der Teilchen mit hohen Impulsen meßbar zu krümmen. Die Auflösung des Transversalimpulses  $p_{\perp}$ , der die Impulskomponente eines Teilchens in der  $r$ - $\varphi$ -Ebene angibt, beträgt [41]:

$$\frac{\sigma_{p_{\perp}}}{p_{\perp}} = \sqrt{0.02^2 + (1.5 \cdot 10^{-3} \text{ GeV}^{-1} \cdot p_{\perp})^2}. \quad (3.1)$$

Die relative Auflösung des Transversalimpulses beträgt also z.B. 2.5 % für ein Teilchen mit  $p_{\perp} = 10 \text{ GeV}$ , während sie für Myonpaare bei einem maximalen Transversalimpuls von  $p_{\perp} = 45 \text{ GeV}$  etwa 6.8 % beträgt.

**Z-Kammern** Die Z-Kammern bestehen aus 24 Driftkammern, die die Jet-Kammer umschließen und deren Drähte senkrecht zur Strahlachse in Abständen von 190 cm bis 196 cm von der Strahlachse gespannt sind. Jede Z-Kammer ist in 8 Sektoren mit je 6 Signaldrähten unterteilt. Zusammen überdecken sie den Polarwinkelbereich von  $|\cos \theta| < 0.72$ . Sie dienen der Messung der  $z$ -Ordinaten am Ende der Teilchenspuren und ermöglichen so die Rekonstruktion der Polarwinkel  $\theta$ . Die Bestimmung der  $z$ -Ordinaten erfolgt durch die Messung der Driftzeiten. Die Ortsauflösung beträgt  $300 \mu\text{m}$  in  $z$ -Richtung und etwa 1.5 cm in der  $r$ - $\varphi$ -Ebene [39].

**Spule** Das homogene, 0.435 T starke, parallel zur Strahlachse gerichtete Magnetfeld wird von einer normalleitenden Spule erzeugt, die den Zentraldetektor umschließt. Das Rückführjoch des Magneten ist mit „Streamer“-Kammern bestückt und bildet das hadronische Kalorimeter. Die Leistungsaufnahme der Spule beträgt bis zu 5 MW, und das Material der Spule entspricht ungefähr 1.5 Strahlungslängen.

**Presampler** Der Presampler besteht im Zentralbereich aus 16 doppelagigen Streamer-Kammern und in den Endkappen aus 32 Vieldrahtkammern. Iniziiert ein Teilchen bereits im Drucktank oder in der Spule (insgesamt ungefähr 2 Strahlungslängen) einen elektromagnetischen Schauer, kann mit der im Presampler nachgewiesenen Teilchenmultiplizität die Energie- und Ortsauflösung des elektromagnetischen Kalorimeters verbessert werden.

**Flugzeitähler** Die Flugzeitähler bestehen aus beidseitig auszulesenden Szintillationszählern mit einer Zeitauflösung von etwa 300 ps. Sie registrieren die Zeit, die ein Teilchen vom Primärvertex bis zu dieser Detektorkomponente benötigt. Die Flugzeitähler sind wichtig für den OPAL-Trigger, und sie dienen der Unterdrückung von Ereignissen aus der kosmischen Höhenstrahlung.

**elektromagnetisches Kalorimeter** Der Energie- und Ortsrekonstruktion von Elektronen, Positronen und Photonen dient das elektromagnetische Kalorimeter, dessen Bleiglasblöcke sich im Zentralbereich 246 cm von der Strahlachse entfernt befinden und in den Endkappen zwischen 217 cm und 242 cm in  $z$ -Richtung vom Wechselwirkungspunkt entfernt angeordnet sind.

Im Zentralbereich sind auf einem Zylindermantel 9440 auf den Wechselwirkungspunkt zeigende Bleiglasblöcke mit einer Länge von je 24.6 Strahlungslängen in 59 Ringen zu je 160 Blöcken befestigt. Jeder Block deckt hier einen Winkelbereich von etwa  $40 \times 40 \text{ mrad}^2$  ab. In den Endkappen sind je 1132 Bleiglasblöcke zu zwei kuppelförmigen Matrizen, die an die konischen Endstücke der Jet-Kammer anschließen und in denen die Blöcke parallel zur Strahlrichtung angeordnet sind, zusammengesetzt. Jeder Block deckt hier eine

Fläche von  $9.2 \times 9.2 \text{ cm}^2$  senkrecht zur Strahlachse bei einer Tiefe von typischerweise 22 Strahlungslängen in  $z$ -Richtung ab.

Die Bleiglasblöcke werden mit Hilfe von Sekundärelektronenvervielfachern (Zentralbereich) und Vakuum-Phototrioden (Endkappen), die das Čerenkov-Licht, das die geladenen Teilchen im Schauer bei der Durchquerung des Bleiglases erzeugen, registrieren, ausgelesen. Dabei deponieren Elektronen und Photonen i. allg. ihre gesamte Energie in diesem Detektorteil, während die anderen geladenen Teilchen hier nur einen geringen Teil ihrer Energie verlieren. Die Energieauflösung beträgt im Zentralbereich [39]

$$\frac{\sigma_E}{E} \simeq 0.002 + 0.063\sqrt{E/(1 \text{ GeV})} \quad (3.2)$$

und in den Endkappen

$$\frac{\sigma_E}{E} \simeq 0.05\sqrt{E/(1 \text{ GeV})}. \quad (3.3)$$

Die hohe Granularität des Kalorimeters gewährleistet eine Ortsauflösung von etwa 11 mm für einen Schauer im Zentralbereich und in den Endkappen.

**hadronisches Kalorimeter** Das Rückführjoch für das Magnetfeld der Spule ist mit Streamer-Kammern bestückt und stellt durch den Wechsel von passiven Eisenlagen, in denen sich der hadronische Schauer entwickeln kann, und den aktiven Nachweiskammern ein „Sampling“-Kalorimeter für hadronisch wechselwirkende Teilchen dar. Gleichzeitig dient dieses Kalorimeter, das den größten Beitrag zu den 7 hadronischen Wechselwirkungslängen vor den Myon-Detektoren liefert, als Myon-Filter. Jenseits des hadronischen Kalorimeters gelangen nur noch Myonen und Neutrinos.

**Myon-Kammern** Großflächige Driftkammern umgeben das hadronische Kalorimeter zum Nachweis der durchdringenden Myonen. Sie bestehen im Zentralbereich aus 4 Lagen mit insgesamt 110 planaren Driftkammern und in den Endkappen aus 4 Lagen Streamer-Kammern. Sowohl Durchtrittsort als auch -richtung der einfallenden Myonen können hier nachgewiesen werden. Die Ortsauflösung beträgt im Zentralbereich 1.5 mm in azimuthaler und 2 mm in  $z$ -Richtung. In den Endkappen wird eine Auflösung von 1 mm in der  $r$ - $\varphi$ -Ebene erreicht.

**Vorwärtsdetektor** Mehrere Detektoren in der Nähe des Strahlrohres dienen der präzisen Luminositätsmessung, die mit  $e^+e^-$ -Paaren aus der Bhabha-Streuung als Referenzreaktion durchgeführt wird. Der Vorwärtsdetektor besteht aus einem System von Driftkammern, Proportionalzählern und einem 24 Strahlungslängen tiefen Blei-Szintillator-Sandwich-Kalorimeter. Der systematische Fehler der Luminositätsmessung mit diesem Detektor liegt bei 0.45 %.

**Silizium-Wolfram-Luminometer** Um den systematischen Fehler der Luminositätsmessung zu verbessern und ihn insbesondere dem statistischen Fehler der erwarteten Datenmenge anzupassen, wurde 1993 ein Silizium-Wolfram-Luminometer eingebaut und in Betrieb genommen. Hierbei handelt es sich ebenfalls um ein Sampling-Kalorimeter, das bei sehr kleinen Winkeln (von  $\theta = 25 \text{ mrad}$  bis  $\theta = 60 \text{ mrad}$ ) mißt. Der systematische Fehler der Luminositätsmessung konnte mit dieser Detektorkomponente auf 0.033 % reduziert werden [42].





## 4. Photon Rekonstruktion

Während geladene Teilchen in den Spurkammern des OPAL-Detektors leicht nachgewiesen werden können, hinterlassen neutrale Teilchen hier keine Spuren. In Photonen zerfallende Teilchen wie  $\pi^0$ -Mesonen sind nur anhand ihrer Signatur im elektromagnetischen Kalorimeter (ECAL) zu identifizieren. Dabei gelangen die Photonen aus dem für neutrale Pionen dominanten Zerfall  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  meist ohne in  $e^+e^-$ -Paare zu konvertieren bis zur Spule, und bilden dann im Presampler und im elektromagnetischen Kalorimeter je einen elektromagnetischen Schauer aus. Die kinematische Rekonstruktion dieser Photonen aus den im ECAL hinterlassenen Energiepositionen soll im folgenden beschrieben werden. Es handelt sich um eine neue Methode, um hadronische Endzustände aus dem  $\tau$ -Zerfall mit verschiedenen  $\pi^0$ -Multiplizitäten von einander trennen zu können, sowie deren Vierer-Impulse zu rekonstruieren.

### 4.1 Elektromagnetische Schauer-Simulationen

Abbildung 4.1 zeigt einen typischen Schauer, den ein einfallendes Photon mit einer Energie von 10 GeV in einem ECAL-Block hinterläßt. Dargestellt sind alle Elektronen (und Positronen), mit einer Mindestenergie von 0.6 MeV, wobei niederenergetische Spuren dunkel und höherenergetische Spuren hell gefärbt sind. Die Energie eines solchen Schauers wird bei OPAL mit Hilfe der von den Elektronen und Positronen emittierten Čerenkov-Strahlung gemessen, die von Sekundärelektronenvervielfachern (Zentralbereich) bzw. Vakuum-Phototrioden (Endkappen) in Spannungspulse, deren Höhe der Zahl der Čerenkov-Photonen und damit der Energie des Schauers proportional ist, umgewandelt werden. Die Prozesse, die zur Schauerausbildung beitragen und die Parametrisierung der gemessenen Energien im ECAL als Funktion der Energie und Richtung der einfallenden Photonen möglich machen, werden im folgenden kurz beschrieben.

Trifft ein hochenergetisches Elektron (Positron) oder Photon auf einen dicken Absorber, wird durch Bremsstrahlungs- und Paarbildungsprozesse eine elektromagnetische Kaskade aus Elektronen, Positronen und Photonen eingeleitet. Die relevante Längenskala für diese Prozesse ist die Strahlungslänge  $X_0$ , die der mittleren Strecke entspricht, auf der ein hochenergetisches Elektron seine Energie bis auf ein e-tel durch Bremsstrahlung verliert. In guter Näherung für die meisten Elemente hängt die Strahlungslänge nur von der Kernladungszahl  $Z$  und der relativen Atommasse  $A$  ab [1]:

$$X_0 = \frac{716.4 \text{ g cm}^{-2} A}{Z(Z+1) \ln(287/\sqrt{Z})}, \quad (4.1)$$

wobei die Strahlungslänge in  $\text{g cm}^{-2}$  angegeben wird und erst nach Division durch die Dichte des Materials die Weglänge ergibt. Für hochenergetische Photonen ist die mittlere freie Weglänge  $\lambda$ , die ein hochenergetisches Photon im Mittel zurücklegt, bevor es durch Paarbildung vernichtet wird, ebenfalls mit der Strahlungslänge verknüpft [1]:

$$\lambda = \frac{9}{7} X_0. \quad (4.2)$$

Die longitudinale Entwicklung des elektromagnetischen Schauers kann also als Funktion der Schauertiefe in Strahlungslängen angegeben werden. Setzt man  $\lambda = X_0$ , wächst die Teilchenan-

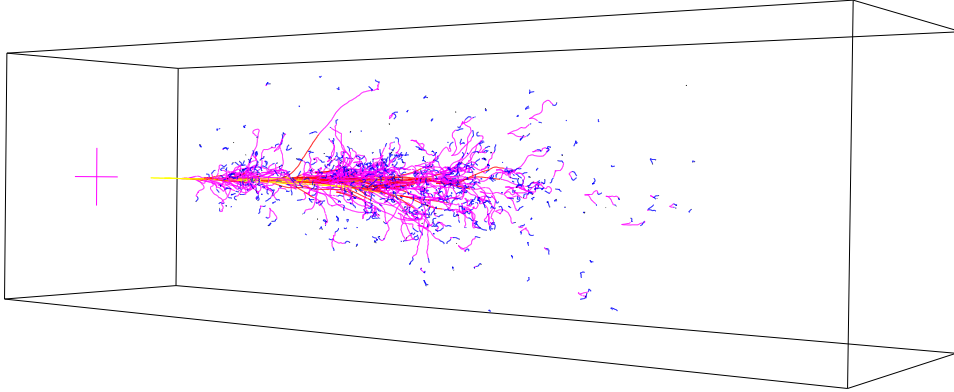


Abbildung 4.1: *Elektromagnetischer Schauer eines 10 GeV Photons in einem Bleiglas-Block ( $10 \times 10 \times 37 \text{ cm}^3$ ). Dargestellt sind alle Elektronen (Positronen) mit einer Mindestenergie von 0.6 MeV, wobei helle Spuren höherenergetischer sind als dunkle. Das Photon fällt von links an der mit einem Kreuz markierten Stelle zentral und entlang der Figurenachse in den Block ein. Diese einfache Simulation berücksichtigt Coulomb-Vielfachstreuung, Paarbildung und Bremsstrahlung, wobei die Wirkungsquerschnitte der beiden letztgenannten Prozesse bis auf eine untere Energieschwelle als von der Energie unabhängig angenommen werden und die Impulse der Tochterteilchen dem halben Impuls des Mutterteilchens entsprechen.*

zahl im Schauer exponentiell mit der Schauertiefe  $x$  an:

$$N(x) = 2^{x/X_0}, \quad (4.3)$$

so lange die dominanten Prozesse im Schauer Bremsstrahlung und Paarbildung sind. Unter der vereinfachenden Annahme, daß nur die beiden Tochterteilchen die Energie des Mutterteilchens erhalten, ergibt sich die mittlere Energie eines Teilchens als Funktion der Schauertiefe zu:

$$E(x) = E_0/N(x) = E_0 2^{-x/X_0}, \quad (4.4)$$

wenn  $E_0$  die Energie des einfallenden hochenergetischen Teilchens ist. Die Schauerentwicklung bricht ab, wenn der Energieverlust für Elektronen nicht mehr dominant durch Bremsstrahlung stattfindet, sondern durch Ionisation. Der Übergangsbereich ist durch die kritische Energie  $E_c$ <sup>1</sup> gegeben, bei der beide Prozesse gleich viel zum Energieverlust beitragen und kann durch folgende empirische Näherungsformel beschrieben werden [1]:

$$E_c = \frac{800 \text{ MeV}}{Z + 1.2}. \quad (4.5)$$

<sup>1</sup> Eine alternative Definition von  $E_c$  ist in [43] gegeben, wonach die kritische Energie erreicht ist, wenn der Energieverlust durch Ionisation pro Strahlungslänge der Energie des Elektrons entspricht:  $E_c = \frac{610 \text{ MeV}}{Z+1.24}$ .

Für die Bleiglasblöcke des OPAL-Kalorimeters (Die Blöcke bestehen aus SF-57 im Zentralbereich und CEREN-25 in den Endkappen [39]) ergibt sich ein Wert von  $E_c = 13.0 \text{ MeV}$  für den Zentralbereich und  $E_c = 16.4 \text{ MeV}$  für die Endkappen. Für Photonen ist unterhalb derselben Energie  $E_c$  nicht mehr die Paarbildung, sondern die Compton-Streuung der dominante Prozeß, so daß auch die Photonen unterhalb der kritischen Energie  $E_c$  nicht mehr zur Schauerentwicklung beitragen. Die Anzahl der Teilchen im Schauer erreicht also in der Tiefe  $x_{\max}$ , für die  $E(x_{\max}) = E_c$  gilt, ein Maximum:

$$x_{\max} = X_0 \frac{\ln(E_0/E_c)}{\ln 2}. \quad (4.6)$$

Jenseits dieser Tiefe fällt die Teilchenanzahl exponentiell ab. Der relative Energieverlust bezüglich der Schauertiefe kann mit der Gammaverteilung beschrieben werden [44]:

$$\frac{1}{E_0} \frac{dE}{dl} = q \frac{(ql)^{p-1} e^{-ql}}{\Gamma(p)}, \quad (4.7)$$

wobei  $l = x/X_0$  die Schauertiefe in Strahlungslängen angibt und die Parameter  $p$  und  $q$  von der Energie  $E_0$  des einfallenden Photons abhängen [1]:

$$\begin{aligned} p &= q \left( \ln \frac{E_0}{E_c} + 0.5 \right) + 1.0, \\ q &\simeq 0.5. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Der maximale Energieverlust tritt dann bei

$$\tilde{x}_{\max} = X_0 \left( \ln \frac{E_0}{E_c} + 0.5 \right) \quad (4.9)$$

auf und liegt für Energien zwischen 1 GeV und 50 GeV ein bis drei Strahlungslängen vor dem Punkt maximaler Teilchenanzahl  $x_{\max}$  aus (4.6). Abbildung 4.2 zeigt den auf die Energie  $E_0$  normierten Energieverlust in Abhängigkeit der Schauertiefe für drei verschiedene Energien, wobei deutlich die Verschiebung des Maximums von etwa  $5X_0$  für  $E_0 = 1 \text{ GeV}$  nach etwa  $7X_0$  für  $E_0 = 10 \text{ GeV}$  unter gleichzeitiger Verbreiterung des Schauerprofils zu erkennen ist. Bei einer typischen Energie von etwa  $E_0 \simeq 5.0 \text{ GeV}$  für ein Photon aus einem  $\tau \rightarrow \rho\nu_\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau \rightarrow \pi 2\gamma\nu_\tau$ -Zerfall, erhält man:

$$\begin{aligned} p &= 4.2 && \text{Zentralbereich,} \\ p &= 4.1 && \text{Endkappen.} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Die radiale Entwicklung des Schauers skaliert nicht mit der Strahlungslänge, sondern mit dem Molière-Radius  $R_M$  [1], der die mittlere radiale Abweichung eines Elektrons mit der Energie  $E_c$  von der Einfallsgeraden durch Coulomb-Vielfachstreuung beschreibt:

$$R_M = X_0 \frac{21.2 \text{ MeV}}{E_c}, \quad (4.11)$$

wobei hier die kritische Energie  $E_c$  nach der Definition in [43] gemeint ist. Für OPAL betragen die Molière-Radien 3.2 cm im Zentralbereich und 4.2 cm in den Endkappen. Ein unendlich langer Zylinder mit dem Radius  $1 R_M$  enthält dann 90 % der Energie, während ein Zylinder mit einem Radius von  $3.5 R_M$  99 % der Energie enthält. Bereits aus diesem Verhalten kann man auf zwei Komponenten schließen, die die radiale Schauerentwicklung kennzeichnen:

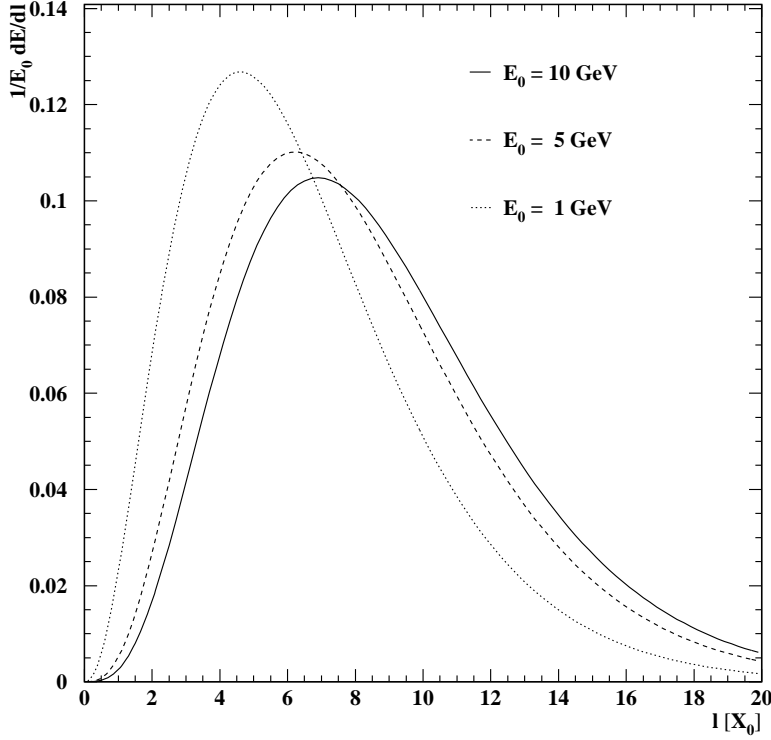


Abbildung 4.2: *Longitudinale Entwicklung eines elektromagnetischen Schauers. Dargestellt ist der relative Energieverlust pro Streckenelement als Funktion der Schauertiefe in Strahlungslängen für drei verschiedene Energien eines in die Endkappe einfallenden Teilchens.*

1. Für die hochenergetischen Teilchen, die am Anfang des Schauers dominieren, ist der typische Streuwinkel durch die Bremsstrahlung für die Aufweitung des Schauers mitverantwortlich:

$$\Theta_{\text{brems}} \sim \frac{m_e}{E_e} = \frac{1}{\gamma},$$

wobei  $m_e$  die Elektronmasse und  $E_e$  die Energie des Elektrons bezeichnen.

2. Für niederenergetische Teilchen ist die Coulomb-Vielfachstreuung fast ausschließlich der zur Aufweitung des Schauers beitragende Effekt. Bei Durchqueren einer Strahlungslänge ist der typische Streuwinkel mit

$$\Theta_{\text{mult}} \sim \frac{13.6 \text{ MeV}}{E_e} = \frac{26.6}{\gamma}$$

deutlich größer als der Streuwinkel der Bremsstrahlung.

Das radiale Profil ist für Bleiglas in [45] gemessen worden und kann durch zwei Exponentialfunktionen beschrieben werden, die der zentralen Komponente durch Bremsstrahlung und einer breiten Komponente durch Coulomb-Vielfachstreuung entsprechen:

$$\frac{1}{E_0} \frac{dE}{dr} = a \lambda_1^2 e^{-\lambda_1 r} + b \lambda_2^2 e^{-\lambda_2 r}. \quad (4.12)$$

Drei Bedingungen fixieren drei der vier Parameter in Gleichung (4.12):

1. 90 % der Energie befinden sich innerhalb eines Zylinders mit  $R = 1 R_M$ :

$$\int_0^{R_M} \frac{1}{E_0} \frac{dE}{dr} r dr = 0.9.$$

2. 99 % der Energie befinden sich innerhalb eines Zylinders mit  $R = 3.5 R_M$ :

$$\int_0^{3.5 R_M} \frac{1}{E_0} \frac{dE}{dr} r dr = 0.99.$$

3. Normierung:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{E_0} \frac{dE}{dr} r dr = 1.$$

Aus der 3. Bedingung folgt  $a + b = 1$ . In [45] und [46] ist das Verhältnis der breiten zur zentralen Schauerkomponente  $c = b/a$  als vierter freier Parameter gewählt worden. Die Messung an Bleiglas TF-1 [45] führte zu dem Verhältnis  $c = 0.14$ , während der aus simulierten Ereignissen für das OPAL-Kalorimeter (Zentralbereich) bestimmte Wert [46] bei  $c = 0.12$  liegt<sup>2</sup>. Die Parameter der radialen Energieverteilung (Gleichung (4.12)) lauten dann für den Zentralbereich [46]:

$$a = 0.89, \quad b = 0.11, \quad \lambda_1 = 1.81 \text{ cm}^{-1}, \quad \lambda_2 = 0.39 \text{ cm}^{-1}, \quad (4.13)$$

und für die Endkappen:

$$a = 0.88, \quad b = 0.12, \quad \lambda_1 = 1.40 \text{ cm}^{-1}, \quad \lambda_2 = 0.29 \text{ cm}^{-1}. \quad (4.14)$$

Mißt man den Abstand von der Schauermitte direkt in Molière-Radien,  $t = r/R_M$ , folgt aus den Normierungsbedingungen, daß der relative Energieverlust in der Variablen  $t$  multipliziert mit  $R_M$  unabhängig von  $R_M$  ist. Abbildung 4.3 zeigt die radiale Schauerentwicklung für verschiedene „Halo-zu-Kern“-Verhältnisse  $c$ .

Die radialen und longitudinalen Schauerprofile (Gleichungen (4.12) und (4.7)) können nun benutzt werden, um die Energiedeposition in jedem ECAL-Block als Funktion der Richtung und Energie des Photons anzugeben. Im Zentralbereich des Kalorimeters muß nur  $\frac{dE}{dr}$  über die Oberfläche des Blocks integriert werden, während in den Endkappen die Verteilung  $\frac{dE}{dr dl}$  über das gesamte Blockvolumen zu integrieren ist.

## 4.2 Schauerparametrisierung im Zentralbereich

Die Parametrisierung der elektromagnetischen Schauer im Zentralbereich des Kalorimeters mit der radialen Energieverteilung aus Gleichung (4.12) ist in [46] durchgeführt worden. Abbildung 4.4 zeigt eine Abwicklung des zylindrischen Kalorimeters und die für die Parametrisierung relevanten Blöcke. Abhängig vom Einschubort des Photons in den ersten Block kann der Anteil

<sup>2</sup> In [46] wird allerdings der Molière-Radius statt über die kritische Energie über den minimalen Energieverlust definiert und ist mit  $R_M = 2.92 \text{ cm}$  etwas kleiner als der oben zitierte Wert  $R_M = 3.2 \text{ cm}$ . Mit dem größeren Wert kommt [46] ebenfalls auf ein „Halo-zu-Kern“-Verhältnis von  $c = 0.14$ .

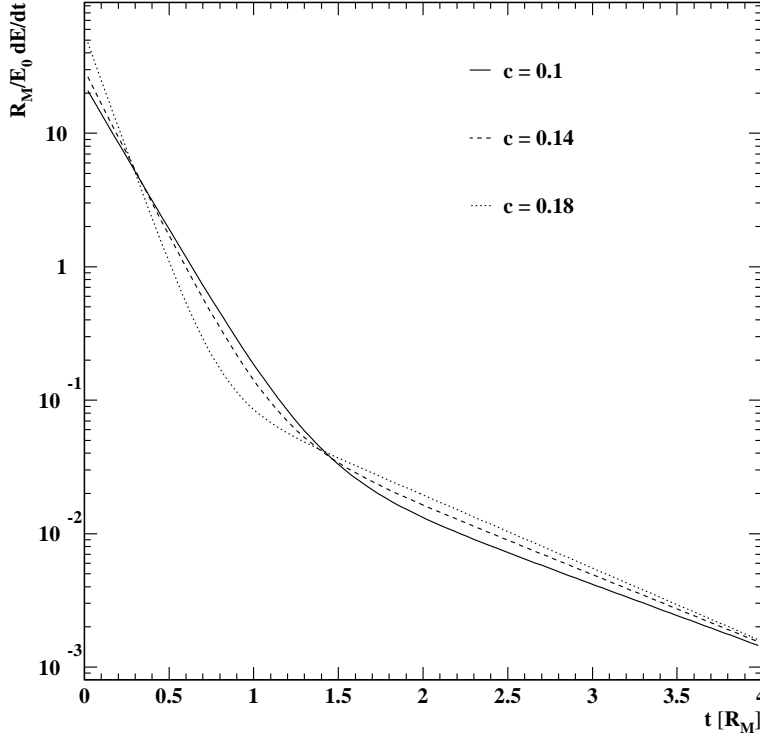


Abbildung 4.3: Radiale Entwicklung eines elektromagnetischen Schauers. Dargestellt ist der relative Energieverlust pro Flächenelement als Funktion des Abstands von der Schauermitte in Molière-Radien für verschiedene „Halo-zu-Kern“-Verhältnisse  $c$ . Der Faktor  $R_M$  in der Ordinate normiert Verteilungen, die zu verschiedenen  $R_M$  gehören, aufeinander.

der Energie in jedem der neun nummerierten Blöcke durch folgendes Integral bestimmt werden:

$$E_i = \frac{1}{2\pi} \int_{x_i^{\min}}^{x_i^{\max}} dx \int_{y_i^{\min}}^{y_i^{\max}} dy \frac{dE}{dr}, \quad i = 1, \dots, 9, \quad (4.15)$$

wobei  $r$  der Abstand des aktuellen Punktes auf der Blockoberfläche vom Eintrittsort  $(x_0, y_0)$  des Photons ist:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (4.16)$$

und die Integrationsgrenzen den Koordinaten der Blockgrenzen des  $i$ -ten Blocks in der ebenen Abwicklung des Zylinders entsprechen. Die projektive Anordnung der Blöcke im Zentralbereich des Kalorimeters erlaubt es, alle möglichen Einschußpositionen des Photons auf den senkrechten Einfall des Photons in einen Block zurückzuführen. Da lediglich die direkten Nachbarblöcke des getroffenen Blocks einen nennenswerten Bruchteil der Energie enthalten (der parametrisierte Bereich enthält immer mehr als 98.9% der gesamten deponierten Energie), kann bei dieser Integration auch der kleine Neigungswinkel ( $2.25^\circ$  in  $\varphi$ -Richtung und  $\sim 1.9^\circ$  in  $z$ -Richtung) zwischen benachbarten Blöcken vernachlässigt werden. Die Integration in Gleichung (4.15) kann dann numerisch ausgeführt werden. In [46] ist für  $21 \times 21$  Einschußorte, die den Punkten eines

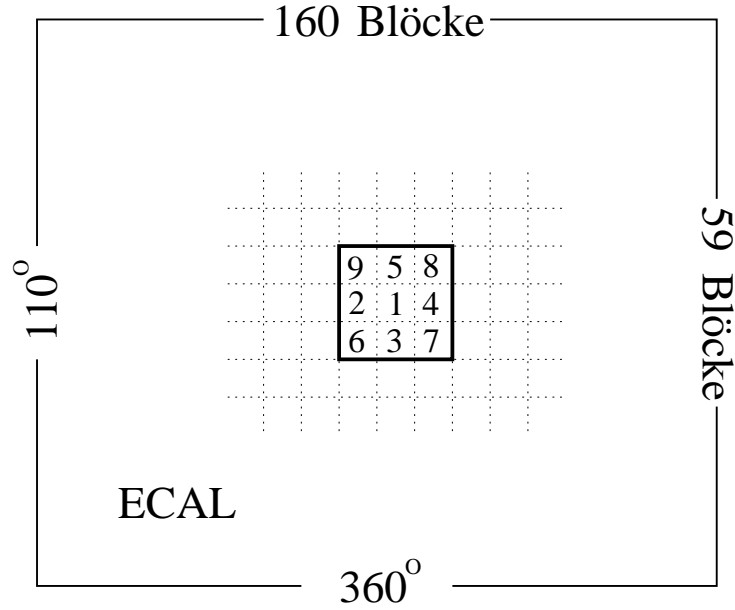


Abbildung 4.4: Der Zentralbereich des elektromagnetischen Kalorimeters von OPAL. Dargestellt ist eine Abwicklung des zylinderförmigen Zentralbereichs. Horizontal ist die  $\varphi$ -Richtung aufgetragen und vertikal ist die  $z$ -Richtung abgebildet. Gepunktete Linien markieren die Blockgrenzen ( $10 \times 10 \text{ cm}^2$ ). Die neun nummerierten Blöcke sind die für die Parametrisierung eines Photons, das in den Block mit der Nummer 1 eintritt, verwendeten Blöcke. Die projektive Geometrie des Kalorimeters erlaubt es, alle Blöcke durch dieselbe Parametrisierung zu beschreiben.

Gitters mit 0.5 cm breiten Abständen in  $x$ - und  $y$ -Richtung entsprechen, das Integral für alle neun Blöcke bestimmt worden. Die integrierten Energieverteilungen sind mit Polynomen in den Ortskoordinaten des Photoneintritts in das ECAL ( $x_0, y_0$ ) gut zu beschreiben [46]. Unter Ausnutzung der Punktsymmetrie bezüglich der Mitte des ersten Blocks,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , ergeben sich die folgenden Polynome:

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_0 \times \left(1 + a_1 x_0^6\right) \left(a_2 + a_3 y_0^6\right), \\
E_{2,4} &= E_0 \times \left(1 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + a_4 x_0^4 + a_5 x_0^5 + a_6 x_0^6 + a_7 x_0^7 + a_8 x_0^8\right) \\
&\quad \times \left(a_9 + a_{10} y_0^4\right), \\
E_{3,5} &= E_0 \times \left(1 + a_1 y_0 + a_2 y_0^2 + a_3 y_0^3 + a_4 y_0^4 + a_5 y_0^5 + a_6 y_0^6 + a_7 y_0^7 + a_8 y_0^8\right) \\
&\quad \times \left(a_9 + a_{10} x_0^4\right), \\
E_{6,8} &= E_0 \times \left(a_1 + a_2(x_0 + y_0) + a_3(x_0 + y_0)^2 + a_4(x_0 + y_0)^3 + \right. \\
&\quad \left. a_5(x_0 + y_0)^4 + a_6(x_0 + y_0)^5 + a_7(x_0 + y_0)^6 + a_8(x_0 + y_0)^7 + \right. \\
&\quad \left. a_9(x_0 + y_0)^8 + a_{10}(x_0 + y_0)^9 + a_{11}(x_0 + y_0)^{10}\right), \\
E_{7,9} &= E_0 \times \left(a_1 + a_2(x_0 - y_0) + a_3(x_0 - y_0)^2 + a_4(x_0 - y_0)^3 + \right. \\
&\quad \left. a_5(x_0 - y_0)^4 + a_6(x_0 - y_0)^5 + a_7(x_0 - y_0)^6 + a_8(x_0 - y_0)^7 + \right. \\
&\quad \left. a_9(x_0 - y_0)^8 + a_{10}(x_0 - y_0)^9 + a_{11}(x_0 - y_0)^{10}\right).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Die Parameter sind in [46] aus der Anpassung der Polynome an die 441 Integrale pro Block

Tabelle 4.1: Koeffizienten der Polynome für den Zentralbereich des Kalorimeters.

Block	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
1	$-4.199 \cdot 10^{-5}$	$9.535 \cdot 10^{-1}$	$-4.006 \cdot 10^{-5}$			
2	$-4.006 \cdot 10^{-1}$	$1.639 \cdot 10^{-2}$	$-5.256 \cdot 10^{-3}$	$1.726 \cdot 10^{-2}$	$-4.246 \cdot 10^{-3}$	$7.784 \cdot 10^{-4}$
3	$-3.910 \cdot 10^{-1}$	$1.154 \cdot 10^{-1}$	$-3.790 \cdot 10^{-2}$	$1.946 \cdot 10^{-3}$	$5.792 \cdot 10^{-4}$	$1.320 \cdot 10^{-3}$
4	$3.940 \cdot 10^{-1}$	$1.092 \cdot 10^{-1}$	$3.454 \cdot 10^{-2}$	$2.717 \cdot 10^{-3}$	$-9.774 \cdot 10^{-5}$	$1.319 \cdot 10^{-3}$
5	$4.320 \cdot 10^{-1}$	$1.024 \cdot 10^{-1}$	$1.108 \cdot 10^{-2}$	$1.511 \cdot 10^{-6}$	$2.433 \cdot 10^{-3}$	$1.723 \cdot 10^{-3}$
6	$1.399 \cdot 10^{-3}$	$-4.106 \cdot 10^{-4}$	$3.720 \cdot 10^{-5}$	$5.261 \cdot 10^{-6}$	$4.000 \cdot 10^{-6}$	$-1.425 \cdot 10^{-6}$
7	$1.403 \cdot 10^{-3}$	$4.202 \cdot 10^{-4}$	$3.715 \cdot 10^{-5}$	$-6.639 \cdot 10^{-6}$	$3.896 \cdot 10^{-6}$	$1.480 \cdot 10^{-6}$
8	$1.399 \cdot 10^{-3}$	$4.136 \cdot 10^{-4}$	$3.678 \cdot 10^{-5}$	$-6.456 \cdot 10^{-6}$	$3.924 \cdot 10^{-6}$	$1.494 \cdot 10^{-6}$
9	$1.395 \cdot 10^{-3}$	$-4.187 \cdot 10^{-4}$	$3.970 \cdot 10^{-5}$	$7.002 \cdot 10^{-6}$	$3.645 \cdot 10^{-6}$	$-1.514 \cdot 10^{-6}$
Block	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$	
1						
2	$-3.204 \cdot 10^{-4}$	$4.353 \cdot 10^{-5}$	$7.914 \cdot 10^{-3}$	$-7.058 \cdot 10^{-6}$		
3	$-5.123 \cdot 10^{-4}$	$4.970 \cdot 10^{-5}$	$7.499 \cdot 10^{-3}$	$-6.677 \cdot 10^{-6}$		
4	$4.930 \cdot 10^{-4}$	$4.783 \cdot 10^{-5}$	$7.534 \cdot 10^{-3}$	$-6.680 \cdot 10^{-6}$		
5	$4.113 \cdot 10^{-4}$	$3.325 \cdot 10^{-5}$	$7.673 \cdot 10^{-3}$	$-6.863 \cdot 10^{-6}$		
6	$-6.850 \cdot 10^{-8}$	$4.487 \cdot 10^{-8}$	$-8.048 \cdot 10^{-10}$	$-5.051 \cdot 10^{-10}$	$3.027 \cdot 10^{-11}$	
7	$-6.381 \cdot 10^{-8}$	$-4.585 \cdot 10^{-8}$	$-8.903 \cdot 10^{-10}$	$5.123 \cdot 10^{-10}$	$3.092 \cdot 10^{-11}$	
8	$-6.162 \cdot 10^{-8}$	$-4.609 \cdot 10^{-8}$	$-9.431 \cdot 10^{-10}$	$5.114 \cdot 10^{-10}$	$3.103 \cdot 10^{-11}$	
9	$-5.290 \cdot 10^{-8}$	$4.648 \cdot 10^{-8}$	$-1.064 \cdot 10^{-9}$	$-5.148 \cdot 10^{-10}$	$3.172 \cdot 10^{-11}$	



bestimmt worden und in Tabelle 4.1 angegeben. Die Verteilung der Energie des Schauers auf die neun Blöcke für Photonen, die in den mittleren Block treffen, ist in Abbildung 4.5 dargestellt. Man erkennt deutlich, daß die Energie hauptsächlich im mittleren Block deponiert wird, während die Randblöcke lediglich für Einschüßorte nahe der Blockgrenze nennenswerte Bruchteile des Schauers beinhalten.

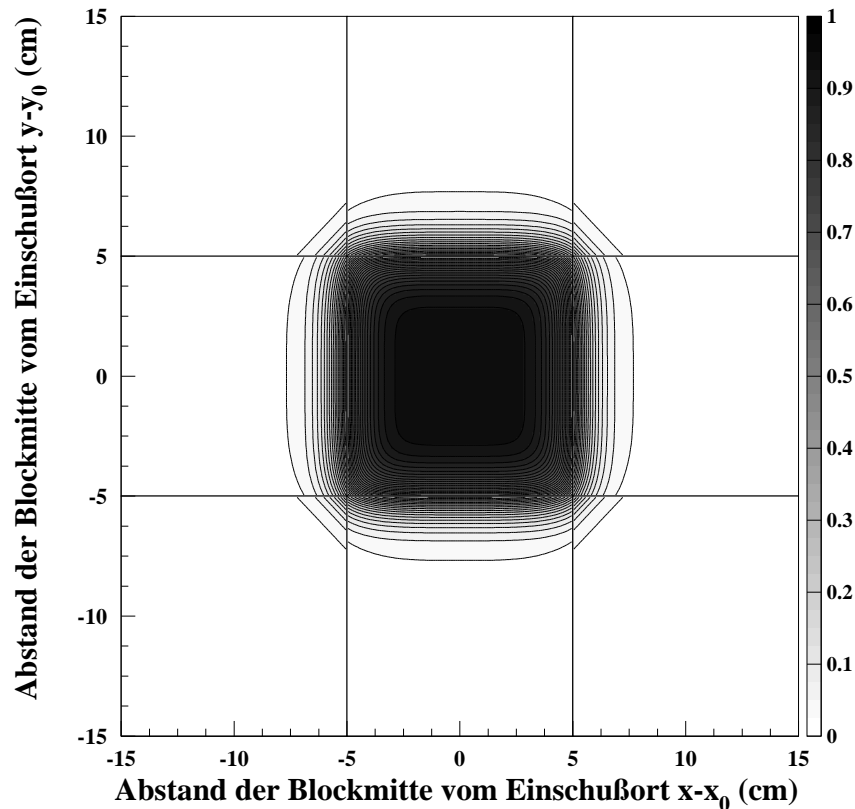


Abbildung 4.5: Verteilung der Energie eines Photons auf die Blöcke im Zentralbereich. Die Graustufen geben den Energieinhalt in dem jeweiligen Block als Funktion der Position der Blockmitte bezüglich des Einschüßorts des Photons an. Konturlinien sind in Abständen von 0.025 eingezeichnet.

### 4.3 Schauerparametrisierung in den Endkappen

In den Endkappen ist die Geometrie der Blöcke nicht mehr invariant unter Wechsel der Photonrichtung, sondern die Blöcke werden unter verschiedenen Winkeln von den Photonen getroffen. Daher kann die Energieverteilung nicht mehr durch die Parametrisierung eines einzigen Blocks für alle Bereiche des Kalorimeters beschrieben werden. In Abbildung 4.6 ist ein Achtel einer Endkappe dargestellt, auf die sich die anderen Achtel (auch die der zweiten Endkappe) durch Spiegelung transformieren lassen. Die 154 Blöcke in diesem Achtel<sup>3</sup> stellen damit, statt des einen Blocks im Zentralbereich, die erforderliche Anzahl Blöcke dar, in denen die Energieverteilung

<sup>3</sup> Die 154 Blöcke sind etwas mehr als eine Achtel-Endkappe, da entlang der diagonalen und der horizontalen Begrenzung auch ganze Blöcke simuliert werden.

parametrisiert werden muß, um das Ansprechen aller 2264 Blöcke in den Endkappen zu beschreiben. Die fehlende Symmetrie bezüglich der Photonrichtung führt auch zu asymmetrischen

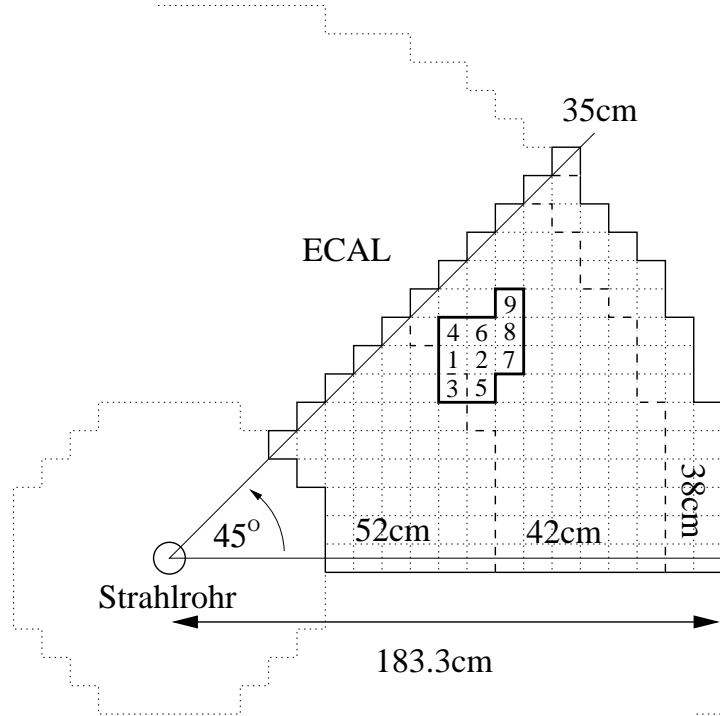


Abbildung 4.6: Ein Achtel einer Endkappe des elektromagnetischen Kalorimeters von OPAL. Die schmale, durchgezogene Linie begrenzt das Achtel, in dem für alle Blöcke die Schauerform parametrisiert wurde. Die anderen Achtel sowie die zweite Endkappe können durch Spiegelungen auf dieses Achtel abgebildet werden. Die gepunkteten Linien markieren die Blockgrenzen ( $9.4 \times 9.4 \text{ cm}^2$ ). Gestrichelte Linien trennen Bereiche, in denen die Blöcke eine unterschiedliche Länge (senkrecht zur Zeichenebene) haben (52 cm innen, 42 cm in der Mitte, 38 cm am äußeren Rand und 35 cm für den Eckblock). Die neun numerierten Blöcke sind die für die Parametrisierung eines Photons, das in den Block mit der Nummer 1 eintritt, verwendeten Blöcke. Die relative Anordnung dieser neun Blöcke ist für alle 154 Blöcke des Achtels identisch.

Energieverteilungen in den Nachbarblöcken des Einschubblocks: Blöcke, die bezüglich der Photonachse weiter innen liegen, erhalten weniger Energie als weiter außen liegende Blöcke, da die Photonen von innen nach außen das Kalorimeter durchqueren, und der größte Energieverlust erst nach 4 bis 7 Strahlungslängen einsetzt. Die Anordnung der acht Blöcke, die neben dem Block, auf den das Photon zunächst trifft, zu berücksichtigen sind, ist daher asymmetrisch. Für alle Blöcke eines Achtels wird, wie in Abbildung 4.6 für einen Block beispielhaft eingezeichnet, dieselbe Anordnung der acht Blöcke, von denen je nach Einschubort des Photons in der Regel nur vier nennenswerte Energieinhalte besitzen, benutzt. Unter der vereinfachenden Annahme, daß die Energieverteilungen in radialer und longitudinaler Ausbreitung in Bezug auf die Einschubrichtung des Photons unabhängig sind, kann die Energie in jedem Block der Endkappen durch folgendes Integral beschrieben werden:

$$E_i = \frac{E_0}{2\pi} \frac{1}{X_0} \int_{x_i^{\min}}^{x_i^{\max}} dx \int_{y_i^{\min}}^{y_i^{\max}} dy \int_{z_i^{\min}}^{z_i^{\max}} dz \frac{1}{E_0} \frac{dE}{dr} \frac{1}{E_0} \frac{dE}{dl}, \quad i = 1, \dots, 9, \quad (4.18)$$

wobei wie in Gleichung (4.15) mit  $r$  der Abstand des aktuellen Punktes im Blockvolumen zur Photonflugrichtung gemeint ist, und  $l$  dessen Distanz vom Eintrittsort des Photons in den Block parallel zur Photonflugrichtung in Einheiten der Strahlungslänge  $X_0$  angibt. Die logarithmische Abhängigkeit des Parameters  $p$  von der Energie  $E_0$  in der longitudinalen Energieverteilung (siehe Gleichung (4.8)) wird für die Berechnung vernachlässigt und für alle Integrale auf den zu  $E_0 = 5 \text{ GeV}$  gehörenden Wert  $p = 4.1$  gesetzt. Für alle 154 Blöcke, die direkt von einem Photon getroffen werden können, sowie den  $8 \times 154$  Nachbarblöcken wird wie im Zentralbereich das Integral (4.18) numerisch für je  $22 \times 22$  Photoneintrittsorte  $(x_0, y_0, z_0)$  bestimmt. Dabei bilden die je 484 Punkte in der  $xy$ -Ebene ein regelmäßiges Gitter mit  $0.46 \text{ cm}$  breiten Abständen. Die  $z$ -Komponente entspricht jeweils der Lage der Oberfläche des ersten getroffenen Blocks in  $z$ -Richtung. Mit der Detektorsimulation wird außerdem die Anzahl der Strahlungslängen, die jedes Photon vor dem Erreichen des Kalorimeters zu passieren hat und in den Endkappen zwischen  $1.3$  und  $6.5$  liegt, bestimmt, und in der Integration berücksichtigt, indem die Schauertiefe  $l$  um diesen Wert verlängert wird. Abschnitte, in denen sich der Schauer durch den Versatz der Blöcke in  $z$ -Richtung kurzzeitig außerhalb des Bleiglasses entwickelt, werden dagegen nicht zu der Schauertiefe addiert. Für jeden der 154 primären Blöcke paßt man für die neun zu beschreibenden Blöcke je ein Polynom dritten Grades in  $x = x_0 - x_1$  und  $y = y_0 - y_1$  an die 484 berechneten Werte pro Block an, wobei die Photonkoordinaten  $(x_0, y_0)$  auf die Blockmitte  $(x_1, y_1)$  des ersten Blocks bezogen werden:

$$E_i = E_0 \times \left( \begin{array}{l} a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 y^3 + \\ ( a_5 + a_6 y + a_7 y^2 + a_8 y^3 ) x + \\ ( a_9 + a_{10} y + a_{11} y^2 + a_{12} y^3 ) x^2 + \\ ( a_{13} + a_{14} y + a_{15} y^2 + a_{16} y^3 ) x^3 \end{array} \right). \quad (4.19)$$

In Tabelle 4.2 sind die Parameter für einen typischen Block in der Endkappe und die acht Blöcke in dessen Umgebung (die markierten Blöcke in Abbildung 4.6) angegeben. Insgesamt wird die Energieverteilung in den Endkappen durch 22176 Parameter beschrieben, während für den Zentralbereich nur 87 Koeffizienten nötig sind. Die asymmetrische Aufteilung der Energie ist in Abbildung 4.7 gut zu erkennen. Die maximale Energiedeposition ist deutlich vom Zentrum des primären Blocks nach oben rechts verschoben.

Die parametrisierte Energieverteilung (4.19) kann mit simulierten Photonschauern aus der vollen GEANT-Simulation des OPAL-Detektors [47] verglichen werden. Hierfür sind pro Block in dem betrachteten Achtel der Endkappe etwa 3000 Photonen mit Energien zwischen  $2 \text{ GeV}$  und  $40 \text{ GeV}$  generiert worden [48]. Hier werden alle einzelnen Wechselwirkungen, die zur Entwicklung des elektromagnetischen Schauers gehören (und auch nicht-elektromagnetische Wechselwirkungen) sowie das Antwortverhalten der Sekundärelektronenvervielfacher auf das emittierte Čerenkov-Licht der geladenen Teilchen im Schauer simuliert. Die Teilchen müssen hierfür bis unter die Čerenkov-Schwelle durch die Bleiglasblöcke verfolgt werden, so daß auch bei vollständig simulierten hadronischen  $Z^0$ -Zerfällen die Berechnungen für das ECAL den zeitaufwendigsten Programmteil ausmachen. In Abbildung 4.8 ist für einen typischen Block der Endkappe ein Vergleich der parametrisierten Energieverteilung auf die neun relevanten Blöcke mit den aus der Simulation gewonnenen Werten zu sehen. Die Punkte geben das mittlere Verhalten der simulierten Photonen für drei verschiedene Einschußhöhen der Photonen ( $(4 \pm 1) \text{ cm}$ ;  $(0 \pm 1) \text{ cm}$ ;  $(-4 \pm 1) \text{ cm}$ ) in den primären Block wieder. Die Linien zeigen das gemittelte Verhalten derselben Photonen, wenn statt der Simulation die Parametrisierung benutzt wird. Die Abhängigkeit der Energieverteilung von der Einschußposition des Photons wird insgesamt gut durch die Parametrisierung wiedergegeben.

Block	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$
1	$3.139 \cdot 10^{-1}$	$-3.397 \cdot 10^{-2}$	$-6.627 \cdot 10^{-3}$	$1.427 \cdot 10^{-4}$	$-8.436 \cdot 10^{-2}$	$1.515 \cdot 10^{-2}$	$1.678 \cdot 10^{-3}$	$-1.908 \cdot 10^{-4}$
2	$2.161 \cdot 10^{-1}$	$-8.670 \cdot 10^{-2}$	$1.644 \cdot 10^{-3}$	$1.700 \cdot 10^{-3}$	$7.614 \cdot 10^{-2}$	$-1.851 \cdot 10^{-2}$	$-1.585 \cdot 10^{-3}$	$4.292 \cdot 10^{-4}$
3	$1.090 \cdot 10^{-3}$	$-3.089 \cdot 10^{-6}$	$7.571 \cdot 10^{-4}$	$-1.836 \cdot 10^{-4}$	$-1.799 \cdot 10^{-4}$	$7.948 \cdot 10^{-5}$	$-7.136 \cdot 10^{-5}$	$1.404 \cdot 10^{-5}$
4	$4.671 \cdot 10^{-2}$	$3.548 \cdot 10^{-2}$	$5.910 \cdot 10^{-3}$	$-5.465 \cdot 10^{-5}$	$-2.576 \cdot 10^{-2}$	$-1.755 \cdot 10^{-2}$	$-1.474 \cdot 10^{-3}$	$3.004 \cdot 10^{-4}$
5	$2.589 \cdot 10^{-3}$	$-6.654 \cdot 10^{-4}$	$1.714 \cdot 10^{-4}$	$-2.628 \cdot 10^{-5}$	$1.356 \cdot 10^{-4}$	$-1.489 \cdot 10^{-5}$	$5.893 \cdot 10^{-5}$	$-1.403 \cdot 10^{-5}$
6	$2.806 \cdot 10^{-1}$	$7.763 \cdot 10^{-2}$	$-2.280 \cdot 10^{-3}$	$-1.472 \cdot 10^{-3}$	$1.638 \cdot 10^{-2}$	$1.795 \cdot 10^{-2}$	$1.272 \cdot 10^{-3}$	$-3.794 \cdot 10^{-4}$
7	$1.649 \cdot 10^{-3}$	$2.801 \cdot 10^{-4}$	$2.016 \cdot 10^{-4}$	$-6.564 \cdot 10^{-5}$	$2.361 \cdot 10^{-4}$	$5.603 \cdot 10^{-6}$	$2.087 \cdot 10^{-4}$	$-4.749 \cdot 10^{-5}$
8	$3.450 \cdot 10^{-2}$	$-3.384 \cdot 10^{-3}$	$-9.422 \cdot 10^{-4}$	$7.680 \cdot 10^{-5}$	$1.602 \cdot 10^{-2}$	$-2.207 \cdot 10^{-4}$	$-4.976 \cdot 10^{-4}$	$1.573 \cdot 10^{-5}$
9	$2.670 \cdot 10^{-3}$	$2.214 \cdot 10^{-3}$	$5.895 \cdot 10^{-4}$	$4.495 \cdot 10^{-5}$	$-2.500 \cdot 10^{-4}$	$-4.294 \cdot 10^{-6}$	$1.978 \cdot 10^{-4}$	$4.250 \cdot 10^{-5}$
Block	$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$	$a_{15}$	$a_{16}$
1	$-2.012 \cdot 10^{-3}$	$-1.162 \cdot 10^{-3}$	$1.205 \cdot 10^{-4}$	$3.991 \cdot 10^{-5}$	$1.398 \cdot 10^{-3}$	$-1.348 \cdot 10^{-4}$	$-4.077 \cdot 10^{-5}$	$-9.998 \cdot 10^{-7}$
2	$2.293 \cdot 10^{-3}$	$1.221 \cdot 10^{-3}$	$-2.221 \cdot 10^{-4}$	$-3.734 \cdot 10^{-5}$	$-1.111 \cdot 10^{-3}$	$3.448 \cdot 10^{-4}$	$2.249 \cdot 10^{-5}$	$-9.059 \cdot 10^{-6}$
3	$2.628 \cdot 10^{-5}$	$-1.723 \cdot 10^{-5}$	$-1.551 \cdot 10^{-5}$	$4.256 \cdot 10^{-6}$	$7.482 \cdot 10^{-6}$	$-5.355 \cdot 10^{-6}$	$-2.208 \cdot 10^{-7}$	$2.577 \cdot 10^{-7}$
4	$3.722 \cdot 10^{-3}$	$1.174 \cdot 10^{-3}$	$-1.374 \cdot 10^{-4}$	$-4.703 \cdot 10^{-5}$	$1.759 \cdot 10^{-5}$	$2.442 \cdot 10^{-4}$	$3.886 \cdot 10^{-5}$	$-4.426 \cdot 10^{-6}$
5	$-4.360 \cdot 10^{-5}$	$1.937 \cdot 10^{-5}$	$8.868 \cdot 10^{-6}$	$-2.666 \cdot 10^{-6}$	$-4.328 \cdot 10^{-6}$	$1.602 \cdot 10^{-6}$	$3.780 \cdot 10^{-7}$	$-1.301 \cdot 10^{-7}$
6	$-5.336 \cdot 10^{-3}$	$-7.862 \cdot 10^{-4}$	$1.861 \cdot 10^{-4}$	$1.655 \cdot 10^{-5}$	$-3.775 \cdot 10^{-4}$	$-3.635 \cdot 10^{-4}$	$-1.405 \cdot 10^{-5}$	$9.602 \cdot 10^{-6}$
7	$3.830 \cdot 10^{-4}$	$-3.249 \cdot 10^{-4}$	$6.446 \cdot 10^{-5}$	$-1.363 \cdot 10^{-6}$	$8.764 \cdot 10^{-5}$	$-7.147 \cdot 10^{-5}$	$5.982 \cdot 10^{-6}$	$1.475 \cdot 10^{-6}$
8	$2.304 \cdot 10^{-3}$	$4.799 \cdot 10^{-4}$	$-5.991 \cdot 10^{-5}$	$-6.817 \cdot 10^{-6}$	$6.866 \cdot 10^{-5}$	$8.541 \cdot 10^{-5}$	$1.628 \cdot 10^{-6}$	$-1.611 \cdot 10^{-6}$
9	$-7.743 \cdot 10^{-5}$	$-6.942 \cdot 10^{-5}$	$-2.941 \cdot 10^{-6}$	$2.215 \cdot 10^{-6}$	$9.983 \cdot 10^{-6}$	$2.862 \cdot 10^{-6}$	$-4.100 \cdot 10^{-6}$	$-9.799 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 4.2: Koeffizienten der Polynome für einen typischen Block in dem Endkappen des Kalorimeters.

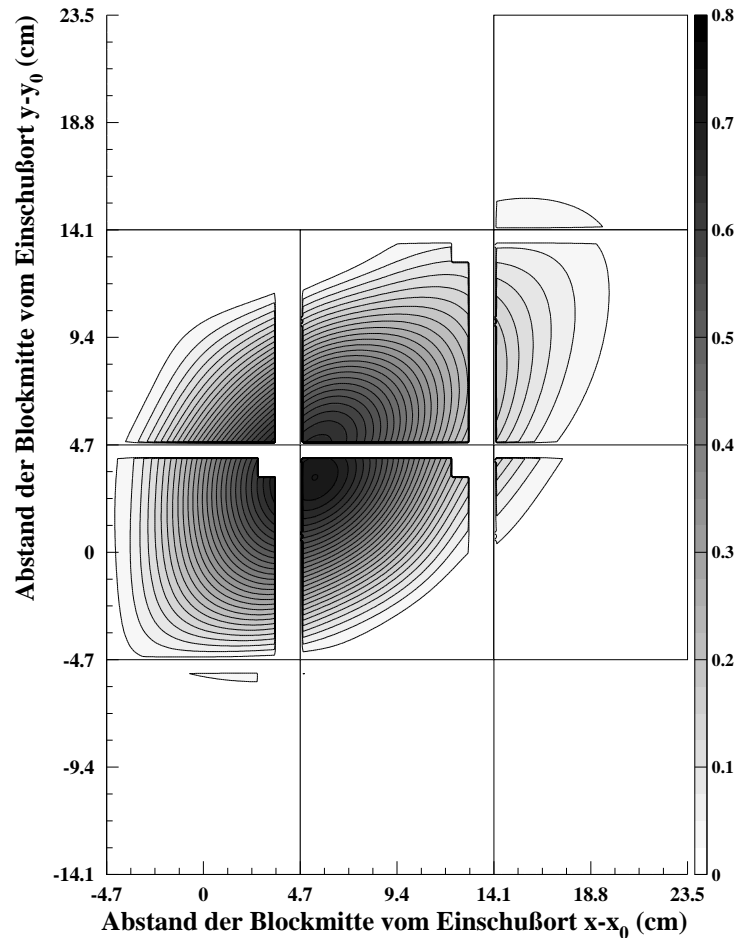


Abbildung 4.7: *Typische Verteilung der Energie eines Photons auf die Blöcke im Endkappenbereich. Die Graustufen geben den Energieinhalt in dem jeweiligen Block als Funktion der Position der Blockmitte bezüglich des Einschussorts des Photons an. Konturlinien sind in Abständen von 0.025 eingezeichnet. Photonen, die nicht als erstes in den Block Nr. 1 treffen, sind nicht in der Abbildung berücksichtigt. Daher sind an den Blockgrenzen einige Bereiche ausgespart.*

#### 4.4 Nachweis von Photonen

Mit den im letzten Abschnitt beschriebenen Parametrisierungen können aus den gemessenen Energien in den Bleiglasblöcken des Kalorimeters in jedem Ereignis die Anzahl der Photonen, deren Richtung und ihre Energie bestimmt werden: Für jeden ECAL-Cluster werden die Hypothesen, daß  $k = 0, \dots, N$  Photonen zu den beobachteten Energien geführt haben, getestet. Dabei werden neben den  $k$  Photonen, für die Richtung und Energie bestimmt werden soll, für jedes geladene Teilchen, das das ECAL erreicht, ein Photonkandidat (Spurphoton) mit festgelegter Richtung vom Wechselwirkungspunkt zum Eintrittsort der Spur in das ECAL und mit variabler Energie in der Anpassung berücksichtigt, da Pionen und Kaonen bereits im ECAL durch hadronische Wechselwirkungen zu Energiedepositionen führen können. In jeder Iteration werden dabei die  $3k$  Parameter der Photonen  $(\varphi_0^i, \theta_0^i, E_0^i)$ ,  $i = 1, \dots, k$  und die  $c$  Energien der Spurphotonen  $E_s^t$ ,  $t = 1, \dots, c$ , wobei  $c$  die Anzahl der Spuren ist, deren Eintrittsorte in das ECAL im betrachteten ECAL-Cluster liegen, so gewählt, daß der folgende Ausdruck minimal

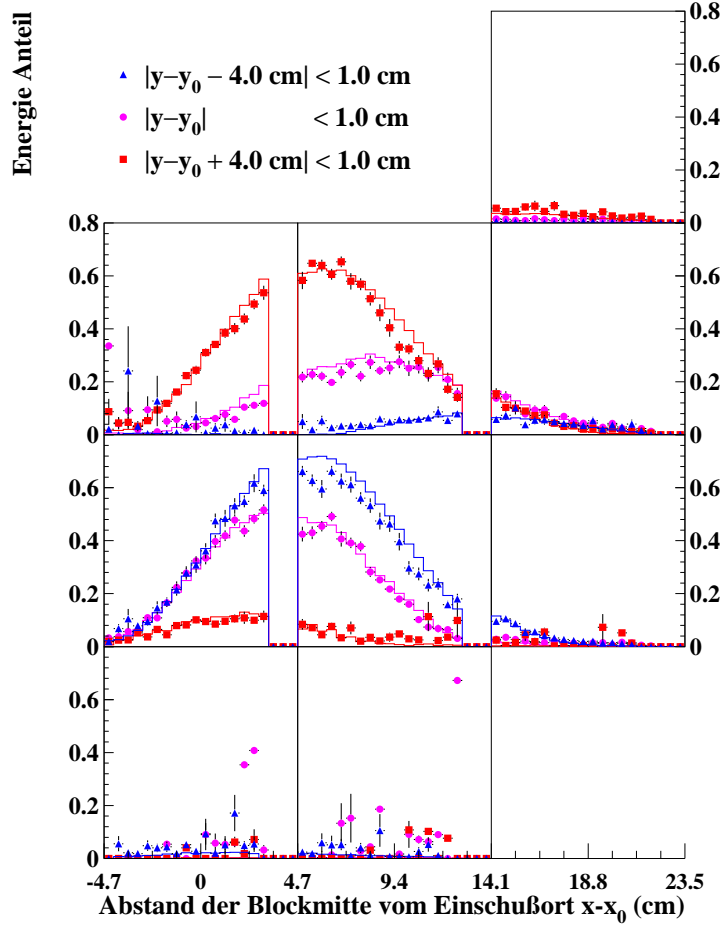


Abbildung 4.8: Vergleich der parametrisierten Energieverteilung mit der vollen Detektorsimulation. Für drei verschiedene Einschufshöhen in den primären Block ist die Energieverteilung auf die neun Blöcke aus der Simulation gegen die horizontale Einschufshöhe aufgetragen. Die Linien geben die aus der Parametrisierung gewonnenen Mittelwerte wieder.

wird:

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^m \left( E_j - \sum_{t=1}^c E_{s,j}^t - \sum_{i=1}^k E_j^i \right)^2. \quad (4.20)$$

Hier ist  $E_j$  die gemessene Energie des  $j$ -ten Blocks von insgesamt  $m$  Blöcken im Cluster,  $E_{s,j}^t$  der Energieeintrag dieses Blocks vom  $t$ -ten Spurphoton,  $E_j^i$  der vorhergesagte Beitrag zur Energie dieses Blocks vom  $i$ -ten Photon und  $\sigma = 100$  MeV die geschätzte Unsicherheit in der gemessenen Blockenergie. Zu einem ECAL-Cluster gehören Blöcke, die bei von Null verschiedenen Energieeinträgen mindestens über eine Kante mit einem anderen Block des Clusters verbunden sind. Für Blöcke, die von einem geladenen Teilchen getroffen werden, wird die gemessene Energie in diesem Block um die wahrscheinlichste Energie, die ein geladenes, minimal ionisierendes Teilchen beim Durchgang durch den Block deponieren kann, vermindert. Diese Werte sind mit Myonen aus simulierten  $\tau$ -Zerfällen bestimmt worden und liegen im Mittel bei 420 MeV für einen Block im Zentralbereich und bei  $8.6 \text{ MeV cm}^{-1}$  in den Endkappen.

In der  $k+1$ -ten Iteration werden für die Startwerte der ersten  $k$  Photonen, deren Parameter

in der vorhergehenden Iteration bereits optimiert wurden, die Resultate der  $k$ -ten Iteration eingesetzt, während für das  $k+1$ -te Photon die Mitte desjenigen Blocks als Startposition gewählt wird, der nach Abzug der Beiträge der ersten  $k$  Photonen und der  $c$  Spurphotonen den größten Energieeintrag enthält, und als Startwert für  $E_0^{k+1}$  der  $k+1$ -te Bruchteil der gesamten Clusterenergie genommen. Die Parameter aller  $k+1$  Photonen und der  $c$  Spurphotonen werden dann gemeinsam so optimiert, daß das  $\chi^2$  minimal wird. Diese Anpassung geschieht in einer linearisierten, iterativen Minimierung [49]. Für die  $k$ -te Minimierung werden die  $3k$  Startwerte der  $k$  Photonen zu einem Vektor  $\mathbf{x}$  zusammengefaßt<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned} x_{i'+1} &= \varphi_0^i, \\ x_{i'+2} &= \theta_0^i, \\ x_{i'+3} &= E_0^i, \quad i' = 3(i-1), \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Für den Lösungsvektor  $\tilde{\mathbf{x}}$  gilt dann:

$$g_n(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{d\chi^2}{d\tilde{x}_n} = 0, \quad n = 1, \dots, 3k. \quad (4.22)$$

Eine Taylor-Entwicklung von  $\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}})$  um  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= g_{i'+n}(\tilde{\mathbf{x}}) \\ &= g_{i'+n}(\mathbf{x}) + \\ &\quad \frac{2}{\sigma^2} \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^3 \frac{dE_j^i}{dx_{i'+l}} \frac{dE_j^i}{dx_{i'+n}} (\tilde{x}_{i'+l} - x_{i'+l}), \\ &\quad i' = 3(i-1), \quad i = 1, \dots, k, \quad n = 1, \dots, 3, \end{aligned} \quad (4.23)$$

wobei Korrelationen zwischen Parametern verschiedener Photonen vernachlässigt werden und die Taylor-Reihe nach dem linearen Glied abbricht. In diesem Term sind auch die zweiten Ableitungen nach den Parametern vernachlässigt, wodurch die Minimierung in jedem Schritt vollständig linear in den Parametern erfolgt. Definiert man nun die positiv definite Matrix  $\mathbf{M}$ , mit den von Null verschiedenen Elementen:

$$\begin{aligned} M_{i'+n, i'+l} &= \frac{2}{\sigma^2} \sum_{j=1}^m \frac{dE_j^i}{dx_{i'+l}} \frac{dE_j^i}{dx_{i'+n}}, \\ &\quad i' = 3(i-1), \quad i = 1, \dots, k, \\ &\quad l = 1, \dots, 3, \quad n = 1, \dots, 3, \end{aligned} \quad (4.24)$$

kann Gleichung (4.23) durch folgende Matrixgleichung beschrieben werden:

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{M} \cdot (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}), \quad (4.25)$$

und die nächste Näherung des Lösungsvektors ist:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (4.26)$$

Nach diesem Schritt wird  $\mathbf{x}$  auf  $\tilde{\mathbf{x}}$  gesetzt und die nächste Näherung für den Lösungsvektor wie eben berechnet. Wenn sich das  $\chi^2$  nicht mehr ändert, bricht die Optimierung ab. Die letzte

<sup>4</sup> Hier wird der Fall beschrieben, in dem kein geladenes Teilchen zu dem ECAL-Cluster assoziiert werden konnte ( $c = 0$ ). Die Verallgemeinerung für  $c > 0$  geschieht durch das Verlängern des Vektors  $\mathbf{x}$  um die  $3c$  Parameter der Spurphotonen, von denen aber nur die  $c$  Energien optimiert werden, während die Winkel fest bleiben.

Näherung  $\tilde{\mathbf{x}}$  ist dann das gesuchte Ergebnis und die genäherte Fehlermatrix des Lösungsvektors ist:

$$\mathbf{V}(\tilde{\mathbf{x}}) = 2 \cdot \mathbf{M}^{-1}. \quad (4.27)$$

Die gesamte Anpassung für einen ECAL-Cluster wird maximal für  $N = 8$  Photonen durchgeführt und bereits bei kleineren  $N$  abgebrochen, wenn die individuelle Restenergie jedes Blocks kleiner als 100 MeV ist. Von den  $N$  Anpassungen wird die mit dem kleinsten Verhältnis von  $\chi^2$  zur Anzahl der Freiheitsgrade d.o.f. als wahrscheinlichstes Ergebnis ausgewählt.

Im nächsten Schritt werden die Photonkandidaten aller Cluster mit einer Mindestenergie von 50 MeV überprüft, während Photonen mit geringerer Energie unberücksichtigt bleiben:

1. Die Energieverteilung im ECAL durch hadronische Wechselwirkungen ist normalerweise breiter als die einer elektromagnetischen Wechselwirkung, da Tiefe und Breite des hadronischen Schauers mit der hadronischen Wechselwirkungslänge  $\lambda \simeq 35 \text{ g cm}^{-2} A^{-1/3}$  skalieren [1], die für die OPAL-Kalorimeter etwa durch 12 Strahlungslängen gegeben ist. Das Spurphoton beschreibt daher den hadronischen Anteil im ECAL nicht immer vollständig, und es müssen weitere Photonkandidaten, die nahe dem Eintrittsort des geladenen Teilchens in das ECAL rekonstruiert werden, der hadronischen Komponente zugeordnet werden.
2. Photonkandidaten, die im ECAL zu eng benachbart rekonstruiert wurden, und meist aus demselben Schauer stammen, müssen zu einem Photonkandidaten vereint werden.

Im Zentralbereich werden Photonen, die, abhängig vom Polarwinkel der Spur des geladenen Teilchens, im Abstand von maximal 7 cm bis 9 cm vom Eintrittsort der Spur in das ECAL rekonstruiert werden, in der Reihenfolge ihrer Abstände zur Spur, der Spur zugeordnet. Der Grenzwert nimmt dabei von der Mitte des Zentralbereichs zum Rand hin zu, da hier zum einen wegen des dickeren Materials vor dem Detektor die Ortsauflösung der Photonen schlechter ist und zum anderen wegen des größeren Abstands zum Wechselwirkungspunkt die Winkelauflösung der Photonen deutlich besser ist, so daß der größere Grenzwert tolerabel ist. Der halbe Öffnungswinkel des Kegels, in dem Photonkandidaten einer Spur zugeordnet werden können, beträgt demnach nur  $1.2^\circ$  am Rand des Zentralbereichs und  $1.6^\circ$  in der Mitte des Zentralbereichs. Die exakte Form des Zuordnungskriteriums, das mit simulierten  $\tau$ -Zerfällen bestimmt worden ist, lautet:

$$1 - \cos \alpha < 0.0004 |\sin \theta_\pi|, \quad (4.28)$$

wobei  $\alpha$  den Winkel angibt, den die Flugrichtung des Photonkandidaten mit der Achse vom Wechselwirkungspunkt zum Eintrittsort der Spur in das ECAL einschließt und  $\theta_\pi$  den Polarwinkel der Spur bezeichnet.

In den Endkappen ist die Ausbildung eines hadronischen Schauers auch im Mittel nicht mehr symmetrisch um den Eintrittsort in das ECAL. Da der hadronische Schauer später anfängt als der elektromagnetische, der der Parametrisierung des Spurphotons zugrunde liegt, und ein Teilchen, das in die Endkappe gelangt, dieselbe von innen nach außen durchquert, sind Photonkandidaten, die im Azimutwinkel mit dem Eintrittsort einer Spur übereinstimmen und einen etwas größeren Polarwinkel haben als die Spur, wahrscheinlich der hadronischen Wechselwirkung des geladenen Teilchens zuzuordnen. In Abbildung 4.9 ist für simulierte  $\tau \rightarrow \pi\nu_\tau$ -Zerfälle, in denen mindestens ein Photonkandidat gefunden wurde, für den Photonkandidaten mit der höchsten Energie die Differenz  $|\cos \theta_\pi| - |\cos \theta_\gamma|$  in Abhängigkeit von  $|\cos \theta_\pi|$  dargestellt, wobei  $\theta_\pi$  der Polarwinkel der Spur und  $\theta_\gamma$  der Polarwinkel des Photonkandidaten ist.



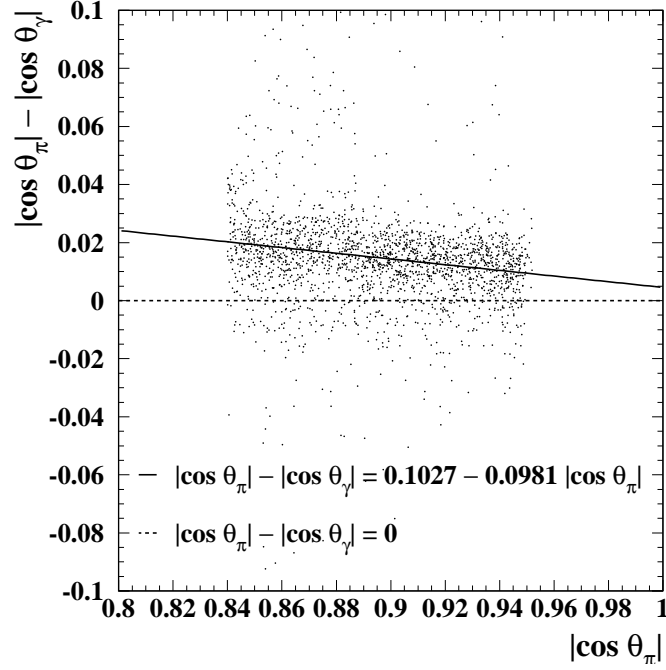


Abbildung 4.9: Beziehung zwischen dem Polarwinkel des Photonkandidaten mit der höchsten Energie und dem Polarwinkel der Spur in simulierten  $\tau \rightarrow \pi\nu_\tau$ -Zerfällen. Die meisten Photonkandidaten liegen innerhalb des Intervalls  $\pm 0.02$  um die durchgezogene Linie und weichen vom symmetrischen Verhalten (gestrichelte Linie) ab.

Die Abweichung von der Nulllinie ist deutlich zu erkennen. Photonkandidaten, die in den Endkappen die folgenden Bedingungen erfüllen, werden daher der Spur zugeordnet:

$$\begin{aligned} |\varphi_\pi - \varphi_\gamma| &< 0.06, \\ ||\cos\theta_\pi| - |\cos\theta_\gamma| - 0.1027 + 0.0981|\cos\theta_\pi|| &< 0.02, \end{aligned} \quad (4.29)$$

wobei  $\varphi_\pi$  den Azimutwinkel des Spureintritts in das ECAL angibt und  $\varphi_\gamma$  der Azimutwinkel des Photonkandidaten ist.

In allen Fällen geschieht die Zuordnung von Photonkandidaten, die im Zentralbereich Gleichung (4.28) oder in den Endkappen Gleichung (4.29) erfüllen, zu einer Spur nur solange, bis die Summe der Energien des Spurphotons und der bereits zugeordneten Photonkandidaten die Energie des geladenen Teilchens (unter Pion-Hypothese) nicht überschreiten.

Die Zusammenfassung von Photonkandidaten, die so nah benachbart rekonstruiert wurden, daß sie wahrscheinlicher aus einem Schauer als aus zwei Schauern stammen, ist mit simulierten  $\tau \rightarrow \pi n\pi^0\nu_\tau \rightarrow \pi 2n\gamma\nu_\tau$ -Zerfällen so optimiert worden, daß nach der Zuordnung von Photonkandidaten zu der Spur und der Zusammenfassung von benachbarten Photonkandidaten die resultierende Anzahl rekonstruierter Photonen ein Maximum bei  $2n$  für  $n = 0, 1, 2$  aufweist:

$$1 - \cos\beta_{i,j} < 0.0003 |\sin\theta_{\text{cone}}|, \quad |\cos\theta_{\text{cone}}| < 0.81, \quad (4.30)$$

$$1 - \cos\beta_{i,j} < 0.0003 |\cos\theta_{\text{cone}}|, \quad |\cos\theta_{\text{cone}}| > 0.81, \quad (4.31)$$

wobei die Photonkandidaten  $i$  und  $j$  den Winkel  $\beta_{i,j}$  einschließen und  $\theta_{\text{cone}}$  den Polarwinkel des Kegels angibt, in dem sich die beiden Photonkandidaten befinden.

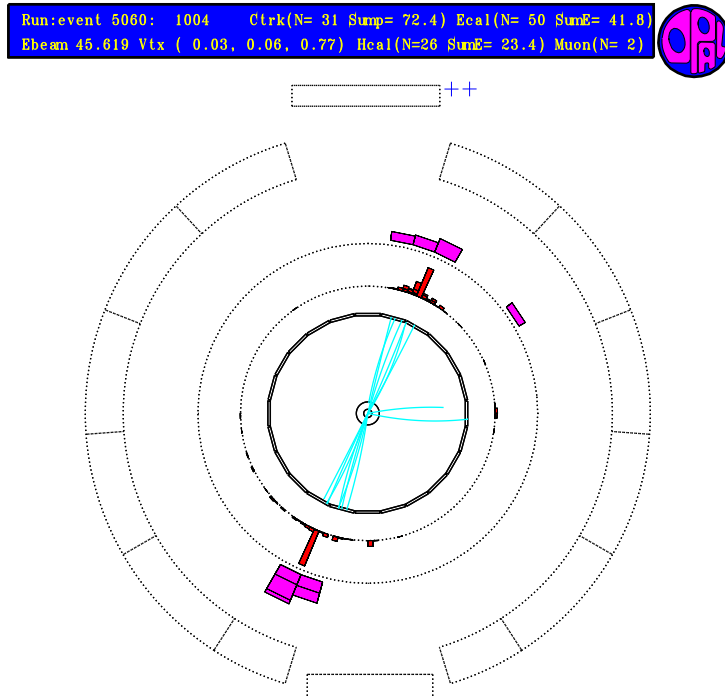


## 5. Ereignisselektion

### 5.1 Selektion von $\tau$ -Paaren

In den Jahren 1989 bis 1995 ist für die Energie  $E_{\text{beam}}$  der kollidierenden Elektronen und Positronen bei LEP je die Hälfte der Energie gewählt worden, die man benötigt, um ein reelles  $Z^0$ -Boson zu erzeugen<sup>1</sup>:  $E_{\text{beam}} = 45.6 \text{ GeV}$ . Dabei wird der Endzustand  $\tau^+\tau^-$  nur in etwa 3.4% aller  $Z^0$ -Zerfälle erzeugt. Der Anteil dieses Reaktionstyps ist, bezogen auf alle bei der Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s} = m_Z$  stattfindenden Reaktionen, zu denen auch Prozesse gehören in den kein reelles  $Z^0$ -Boson erzeugt wird, sogar noch kleiner. Zu unterscheiden sind hier, neben den Ereignissen, in denen das  $Z^0$ -Boson mit einem Verzweigungsverhältnis von etwa 20% in unsichtbare Neutrinos zerfällt, die folgenden Prozesse:

$e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ : Zu  $(69.90 \pm 0.15)\%$  zerfällt das  $Z^0$ -Boson in Quark-Antiquark-Paare [1], die dann hadronisieren. Ein typisches „multihadronisches“ Ereignis, das 1994 mit dem OPAL-Detektor aufgezeichnet wurde, ist hier dargestellt.



Die Abbildung zeigt einen Schnitt in der  $r$ - $\varphi$ -Ebene durch den OPAL-Detektor. Schematisch sind die Begrenzungen einiger Detektorkomponenten eingezeichnet. Die beiden kleinen Kreise in der Mitte begrenzen den Mikrovertex-Detektor und den Vertex-Detektor. Die Darstellung der Spuren, die in den Drift-Kammern nachgewiesen wurden, endet

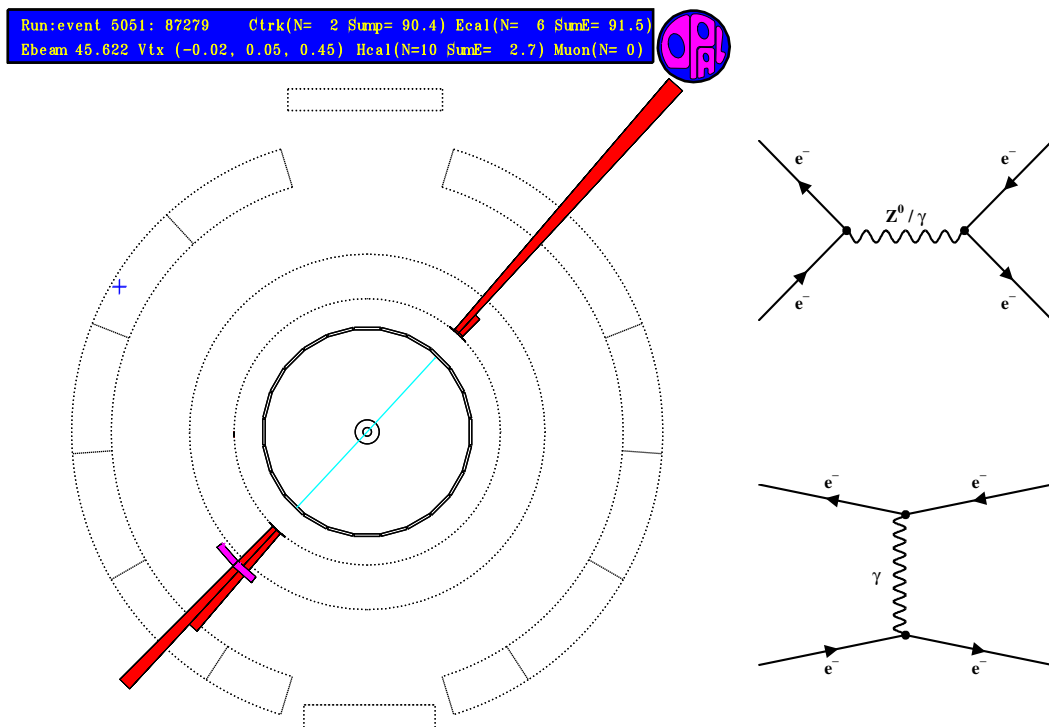
<sup>1</sup> Um die  $Z^0$ -Resonanzkurve aufzunehmen, hat man die Schwerpunktsenergie um bis zu  $\pm 3 \text{ GeV}$  variiert.

an der Spule. Der nächste (gepunktete) Kreis kennzeichnet den Beginn des elektromagnetischen Kalorimeters, dessen getroffene Blöcke ebenfalls dargestellt sind, wobei die Länge jedes Blocks seinem Energieinhalt entspricht. Treffer im hadronischen Kalorimeter, das einen Ring weiter außen beginnt, sind genauso energieproportional abgebildet. Den Abschluß bilden die Myon-Kammern. Die Treffer hier sind als Kreuze wiedergegeben. Die Kopfzeile in der Darstellung des Ereignisses enthält einige Informationen über Nummer und Zeitpunkt des Ereignisses, die Anzahl der rekonstruierten Spuren und die Summe ihrer Impulsbeträge sowie die Summen der beobachteten Energien in den Kalorimetern. Neben den abgebildeten Ereignissen ist jeweils das Feynman-Diagramm in der niedrigsten Ordnung angegeben, das den entsprechenden Prozeß beschreibt.

In der Selektion werden nur Ereignisse berücksichtigt, die höchstens sechs Spuren in den Drift-Kammern aufweisen, so daß die meisten multihadronischen Ereignisse, die bei einer Streuung von 4.4 Spuren im Mittel 14.3 Spuren im Zentraldetektor hinterlassen [50], unterdrückt werden. Dabei müssen rekonstruierte Spuren im Zentraldetektor folgende Qualitätskriterien erfüllen, um berücksichtigt zu werden:

- mindestens 20 Treffer in der Jet-Kammer gehören zu der Spur;
- ihr minimaler Abstand zur Strahlachse,  $d_0$ , beträgt höchstens 2.0 cm, wobei der Abstandsvektor senkrecht zur Strahlachse steht;
- der Betrag der  $z$ -Komponente,  $|z_0|$ , des Punktes, an dem die Spur den minimalen Abstand zur Strahlachse erreicht, ist kleiner als 75 cm;
- der transversale Impuls der Spur,  $p_{\perp} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ , beträgt mindestens 0.1 GeV;
- die Entfernung,  $r_1$ , des innersten Spurpunktes von der Strahlachse beträgt höchstens 75 cm.

$e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ : Der Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung eines  $e^+e^-$ -Paares ist (gemittelt über die verschiedenen Schwerpunktsenergien, die während der Datennahme von 1989 bis



1995 um die  $Z^0$ -Masse herum gewählt worden sind) etwa 3.1 mal größer als der Wirkungsquerschnitt für die Produktion eines  $\tau$ -Paares, wenn man in beiden Wirkungsquerschnitten den Streuwinkel auf den Bereich  $|\cos\theta| < 0.976$  einschränkt.

Wie die Abbildung zeigt, ist die Signatur dieser Ereignisklasse sehr klar. Kennzeichnend sind zwei entgegengesetzt gerichtete Spuren, die zu Einträgen im elektromagnetischen Kalorimeter in der Höhe der Strahlenergie assoziiert sind.

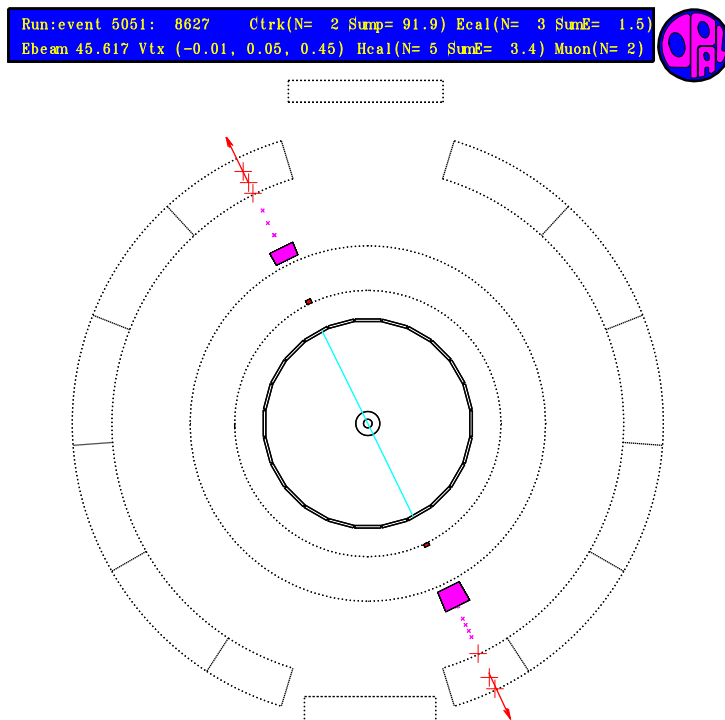
In der  $\tau$ -Paar-Selektion werden daher alle Ereignisse verworfen, in denen mehr als 80% der Schwerpunktsenergie im elektromagnetischen Kalorimeter deponiert wurden, sofern die Ereignisse mit  $|\cos\theta| < 0.7$  im Zentralbereich des Detektors aufgezeichnet wurden. In der Endkappenregion werden mindestens 25% der Schwerpunktsenergie im Kalorimeter verlangt, wenn sich die Impulsbeträge der Spuren zu über  $0.8\sqrt{s}$  addieren, um ein Ereignis zu verwerfen. Für Ereignisse mit kleineren Impulsbeträgen muß hier die Summe aus deponierter Energie und Impulsbeträgen mindestens  $1.05\sqrt{s}$  betragen, damit sie als e-Paare verworfen werden können.

Ein weiterer Unterschied zu den anderen Prozessen mit einem Fermion-Antifermion-Paar im Endzustand ist durch die Winkelverteilung dieser Ereignisse gegeben. Da die e-Paar-Produktion auch im  $t$ -Kanal (das untere Feynman-Diagramm) möglich ist, folgt der Wirkungsquerschnitt nicht wie bei den anderen Fermion-Paaren der Verteilung  $1 + \cos^2\theta$ , sondern enthält unter anderem einen Term

$$\left. \frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^-)}{d\cos\theta} \right|_{t\text{-Kanal}} \propto \frac{(1 + \cos\theta)^2 + 4}{(1 - \cos\theta)^2}, \quad (5.1)$$

durch den der Wirkungsquerschnitt bei kleinen Winkeln  $\theta$  deutlich ansteigt.

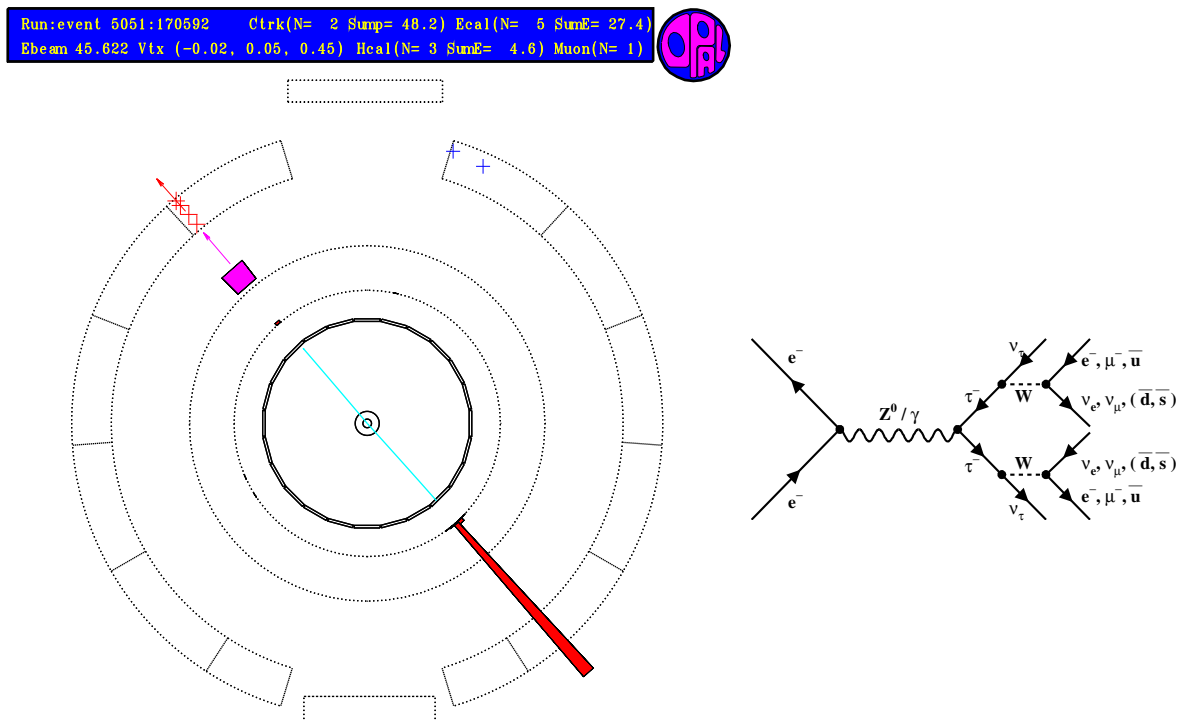
$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ : Besteht ein Ereignis aus zwei Spuren, deren Impulsbeträge sich zu über 60%



der Schwerpunktsenergie addieren, sind außerdem pro Spur weniger als 2.0 GeV Energie im ECAL assoziiert oder mindestens zwei Treffer in den Myon-Kammern vorhanden, wird es als  $\mu$ -Paar erkannt und verworfen.

Ein typisches Ereignis mit dieser Signatur ist hier dargestellt.

$e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ : Tau-Paare sind bei hohen Schwerpunktsenergien relativ leicht zu erkennen, da die Zerfallsprodukte der Taus durch den Lorentz-Boost zu sehr engen Kegeln, deren Achsen einen Winkel von fast  $180^\circ$  einschließen, gebündelt werden. Die unbeobachtet entkommenen Neutrinos vermindern die sichtbare Energie im Detektor, so daß auch in gleichleptonischen Ereignissen gut zwischen der direkten Produktion des Lepton-Paares und der Produktion im  $\tau$ -Zerfall unterschieden werden kann.



In der Selektion werden genau zwei rekonstruierte Kegel mit Öffnungswinkeln von höchstens  $70^\circ$  und je einer ungeraden Anzahl von Spuren, deren Ladungen sich zu  $\pm 1$  addieren, verlangt. Die einfachste Signatur eines  $\tau$ -Paares erhält man, wenn ein  $\tau$  nach  $\nu_\tau e \nu_e$  und das andere in  $\nu_\tau \mu \nu_\mu$  zerfällt, da wegen der Erhaltung der Leptonzahl der direkte Prozeß  $e^+e^- \rightarrow e^\pm \mu^\mp$  verboten ist<sup>2</sup>. Ein Ereignis dieser Art ist hier abgebildet<sup>3</sup>.

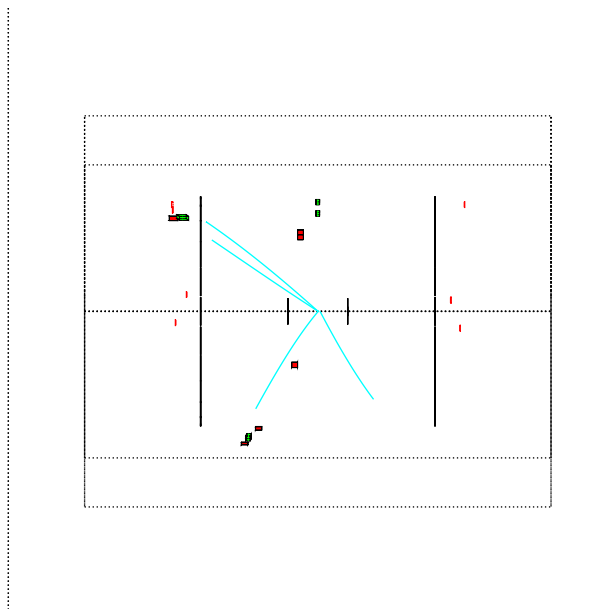
$e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma^*\gamma^*$ : Eine weitere Ereignisklasse, die bei der Selektion verworfen werden muß, bilden die sogenannten „Zwei-Photon“-Ereignisse. Unter der Aussendung je eines virtuellen Photons werden die Kollisionspartner Elektron und Positron nur schwach von ihrer

<sup>2</sup> Strahlt das einlaufende Elektron z.B. ein virtuelles Photon ab, das einlaufende Positron ein virtuelles W-Boson, und koppeln beide an ein Myon, erhält man auch den Endzustand  $e^-\bar{\nu}_e\mu^+\nu_\mu$ . Dieser Prozeß ist allerdings gegenüber der Erzeugung eines reellen  $Z^0$ -Bosons, das dann in Taus zerfällt, stark unterdrückt. Wie bei den im nächsten Absatz behandelten Zwei-Photon Ereignissen, entkame das Elektron im Endzustand in den meisten Fällen durch das Strahlrohr, so daß auch die Signatur dieses Ereignisses leicht von  $\tau$ -Zerfällen zu trennen ist.

<sup>3</sup> Diese Ereignisklasse führte auch zur Entdeckung des  $\tau$ -Leptons am SPEAR-Speicherring im Jahr 1975 [51].

ursprünglichen Flugbahn abgelenkt und entkommen meist unentdeckt durch das Strahlrohr. Die beiden Photonen koppeln an ein geladenes Fermion, und es entsteht ein Fermion-Antifermion-Paar mit geringer Energie, das im Detektor nachgewiesen wird. Falls das Fermion-Paar aus Taus oder Quarks besteht, werden die entsprechenden Zerfallsprodukte nachgewiesen. Neben der geringen Energie, die diese Ereignisse kennzeichnet, sind Zwei-Photon-Prozesse daran zu erkennen, daß die beiden Photonen nicht, wie vorher Elektron und Positron, dieselbe Energie und entgegengesetzte Impulse haben, sondern in der Regel bewegt sich der Schwerpunkt des Zwei-Photon-Systems entlang der Strahlrichtung oder mit einem kleinen Winkel zur Strahlrichtung durch den Detektor.

Run: event 5051: 849 Ctrk(N= 4 SumE= 2.4) Ecal(N= 11 SumE= 2.0)  
Ebeam 45.615 Vtx (-0.04, 0.00, 0.62) Hcal(N= 2 SumE= 0.6) Muon(N= 0)



Ereignisse in denen zwei Kegel rekonstruiert wurden, deren Achsen höchstens einen Winkel von  $165^\circ$  einschließen, werden daher entfernt. In einem Schnitt entlang der Strahlrichtung durch den Detektor kann man in dem hier abgebildeten Ereignis gut erkennen, daß sich die Spuren nicht zu zwei kollinearen Kegeln kombinieren lassen.

Zu den eben genannten Selektionskriterien, die Bestandteil der  $\tau$ -Paar-Selektion sind, wie sie z.B. in [52] beschrieben wird, gehört außerdem die Unterdrückung kosmischer Myonen. Dabei handelt es sich um Myonen, die den Detektor von außen kommend durchqueren und von den Flugzeitählern bei Eintritt in den Detektor und Austritt aus dem Detektor unterschiedlichen Zeitpunkten zugeordnet werden, so daß sie von Myon-Paaren, die hier gleichen Zeiten zugeordnet werden, zu unterscheiden sind. Jedes nach den oben genannten Kriterien übrigbleibende Ereignis wird als  $\tau$ -Paar klassifiziert, sofern für beide rekonstruierten Kegel in dem Ereignis der Polarwinkel  $\theta$  des totalen Kegel-Impulses, der aus den Spurimpulsen und den Energieeinträgen im elektromagnetischen Kalorimeter berechnet wird, die Bedingung  $|\cos \theta| < 0.95$  erfüllt und in mindestens einem der Kegel entweder eine oder drei Spuren rekonstruiert wurden.

Um den verbleibenden Anteil aus Untergrundquellen im Signalkanal bestimmen zu können, ist für die oben aufgeführten Ereignisklassen eine große Anzahl von Ereignissen simuliert worden. Dabei unterscheidet man zwischen den Ereignis-Generatoren, die die Vierervektoren der Teilchen

im Endzustand gemäß der aus dem entsprechenden Matrixelement berechneten Wahrscheinlichkeit generieren, und der Detektorsimulation, mit der das Antwortverhalten des OPAL-Detektors auf die Teilchen im Endzustand beschrieben wird. Die Detektorsimulation berücksichtigt dabei unter anderem die Wahrscheinlichkeit für den Nachweis eines Teilchens sowie die endliche Auflösung in jeder Detektorkomponente. Während der Zerfall kurzlebiger Teilchen im Endzustand, wie z.B. der des  $\tau$ -Leptons, bereits auf Generator-Ebene simuliert wird, übernimmt die Detektorsimulation den Zerfall der stabileren Teilchen (z.B.  $K^0$ -Mesonen) und die Erzeugung sekundärer Teilchen, indem der Weg jedes Teilchens durch den Detektor schrittweise verfolgt wird, und in jedem Schritt die Wahrscheinlichkeit aller in Frage kommender Prozesse bestimmt wird, von denen dann „zufällig“, aber gemäß der berechneten Wahrscheinlichkeiten, einer (oder keiner) ausgewählt wird.

Die simulierten Datensätze in dieser Analyse bestehen für den Signalkanal aus 600 000  $\tau$ -Paaren, die bei einer Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{s} = m_Z$  mit KORALZ 4.0 [53] generiert wurden. Ihre Zerfälle sind mit TAUOLA 2.4 [54] modelliert worden und anschließend mit der auf dem Programmpaket GEANT [55] basierenden Simulation des OPAL-Detektors [47] bearbeitet worden. Die Datensätze für die Untergrundquellen bestehen aus 1 000 000  $q\bar{q}$ -Ereignisse, die mit JETSET 7.4 [56] erzeugt worden sind, 800 000 mit RADBAB 2.0 [57, 58] generierten  $e$ -Paaren, 600 000  $\mu$ -Paaren, die wie die  $\tau$ -Paare mit KORALZ 4.0 simuliert worden sind, sowie 800 000 Ereignissen aus Zwei-Photon-Prozessen ( $e^+e^- \rightarrow e^+e^-1^+1^-$ ), die mit VERMASEREN 1.01 [59, 60] generiert worden sind. Alle simulierten Ereignisse aus diesen Untergrundquellen sind, wie die simulierten Ereignisse im Signalkanal, mit der vollen Detektorsimulation prozessiert worden.

Im Anschluß an die  $\tau$ -Paar-Selektion werden die beiden Kegel in jedem Ereignis getrennt behandelt und nur dann weiter bearbeitet, wenn ein oder drei geladene Teilchen im Kegel gefunden wurden. In den für diese Analyse verwandten Datensätzen aus den Jahren 1990 bis 1995 sind insgesamt 297 988  $\tau$ -Kandidaten mit einem geschätzten Untergrundanteil von 3.9% gefunden worden.

## 5.2 Selektion semihadronischer Endzustände

Die einzelnen Zerfallskanäle der  $\tau$ -Leptonen trennt man mit Hilfe einer sogenannten „Maximum Likelihood“ Selektion (MLS), die bereits in anderen Analysen von  $\tau$ -Zerfällen (siehe z.B. [61]) erfolgreich eingesetzt worden ist. Das Prinzip dieser Selektion wird im folgenden Abschnitt kurz erläutert.

### 5.2.1 Prinzip der „Maximum Likelihood“ Selektion

In der MLS wird für jeden  $\tau$ -Kandidaten für die möglichen Zerfallsmodi eine Wahrscheinlichkeit berechnet und anschließend der Modus, der die größte Wahrscheinlichkeit hat, dem  $\tau$ -Kandidaten zugeordnet. Die Wahrscheinlichkeit setzt sich dabei aus dem Produkt vieler einzelner Wahrscheinlichkeiten zusammen, die aus dem Vergleich der im beobachteten Zerfall gemessenen Observablen mit Referenz-Verteilungen für die einzelnen Zerfallskanäle, die mit den simulierten  $\tau$ -Zerfällen bestimmt worden sind, ermittelt werden. Die Referenz-Verteilungen werden so normiert, daß die Summe aller Einträge in jeder Verteilung den Wert Eins ergibt. Für die  $i$ -te Observable  $x_i$  und  $N$  zu unterscheidende Zerfallsarten, ist die Wahrscheinlichkeit  $e_j^i$  für den  $j$ -ten Zerfallsmodus:

$$e_j^i = \frac{f_j^i(x_i)}{\sum_{k=1}^N f_k^i(x_i)}. \quad (5.2)$$



Mit  $f_j^i(x_i)$  ist hier der Wert der Referenz-Verteilung, die zum  $j$ -ten Zerfallsmodus und zur  $i$ -ten Observablen gehört, an der Stelle  $x_i$  gemeint. Dabei sind die Referenz-Verteilungen keine kontinuierlichen Funktionen, sondern in der Größe  $x_i$  in  $n_i$  Intervallen diskretisierte Verteilungen. Die Größe  $e_j^i$  gibt daher die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß der Zerfall des  $\tau$ -Leptons im  $j$ -ten Zerfallsmodus stattgefunden hat, wenn ein beliebiges  $x_i'$  in dem Intervall beobachtet wurde, das  $x_i$  enthält.

Werden insgesamt  $M$  Observablen benutzt, um Einzelwahrscheinlichkeiten für die Zerfallsmodi zu bestimmen, ergibt sich die Gesamtwahrscheinlichkeit für den  $j$ -ten Zerfallsmodus durch das normierte Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$p_j = \frac{\prod_{i=1}^M e_j^i(x_i)}{\sum_{k=1}^N \prod_{i=1}^M e_k^i(x_i)}. \quad (5.3)$$

Der Zerfallskanal mit der größten Wahrscheinlichkeit  $p_j$  wird schließlich ausgewählt.

### 5.2.2 Referenz-Verteilungen

In der hier vorgestellten Analyse werden für die Zerfälle, in denen eine Spur rekonstruiert wurde, die Kanäle  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau + X^-$ , wobei  $X^-$  für einen der Endzustände  $e^- \bar{\nu}_e$ ,  $\mu^- \bar{\nu}_\mu$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^- \pi^0$ ,  $\pi^- 2\pi^0$  oder  $\pi^- 3\pi^0$  steht, unterschieden. Sind drei Spuren in einem Zerfall nachgewiesen worden, kann entweder in einem der nominell zu den einspurigen Zerfällen zählenden Kanäle durch die Konversion eines Photons aus einem  $\pi^0$ -Zerfall oder der Konversion eines Bremsstrahlungsphotons die Zahl der Spuren auf drei angewachsen sein<sup>4</sup>, oder aber es handelte sich um einen der nominell dreispurigen Endzustände  $X^-$  aus der Reihe  $2\pi^- \pi^+$  (ohne  $K_S^0$ ),  $2\pi^- \pi^+$  (mit  $K_S^0$ ) und  $2\pi^- \pi^+ \geq 1\pi^0$ . Entsprechende Ladungs- und Paritäts-konjugierte Endzustände für  $\tau^+ \rightarrow \bar{\nu}_\tau X^+$  sind hier implizit mit angesprochen.

Zur Trennung der sechs einspurigen Zerfallskanäle werden dreizehn Referenz-Verteilungen benutzt, die für den Zentralbereich des Detektors in den Abbildungen 5.1–5.4 dargestellt sind und im folgenden vorgestellt werden:

**PRMU** Die Anzahl der Treffer im Presampler, die zum Kegel assoziiert wurden. Da das Material, das sich vor dem elektromagnetischen Kalorimeter befindet, etwa zwei Strahlungslängen entspricht, bilden Photonen oft schon vor dem Erreichen des Kalorimeters einen Schauer aus. Eine hohe Trefferanzahl im Presampler ist daher ein Indiz für Photonen im Endzustand, so daß diese Observable bei der Trennung der Kanäle mit neutralen Pionen hilft.

**DPHM** Der größte Winkel, der zwischen der Spur und einem Presampler-Cluster, der noch zum Kegel gehört, gefunden wurde. Je weiter entfernt von der Spur ein Schauer im Presampler registriert wurde, um so wahrscheinlicher stammt der Cluster von einem  $\pi^0$  und nicht von einem Bremsstrahlungsphoton der Spur bzw. einem von dem geladenen Teilchen gestarteten elektromagnetischen Schauer. Diese Variable trennt daher gut zwischen Elektronen, die bereits vor dem ECAL einen Schauer ausgelöst haben und Endzuständen mit neutralen Pionen.

<sup>4</sup> Nur die ersten fünf der einspurigen Kanäle werden in der Klassifizierung dreispuriger Zerfälle berücksichtigt. Kanäle mit höheren  $\pi^0$ -Multiplizitäten bilden einen Anteil von nur 1.5%, so daß sie in der Selektion von dreispurigen Ereignissen keine nennenswerte Rolle spielen.

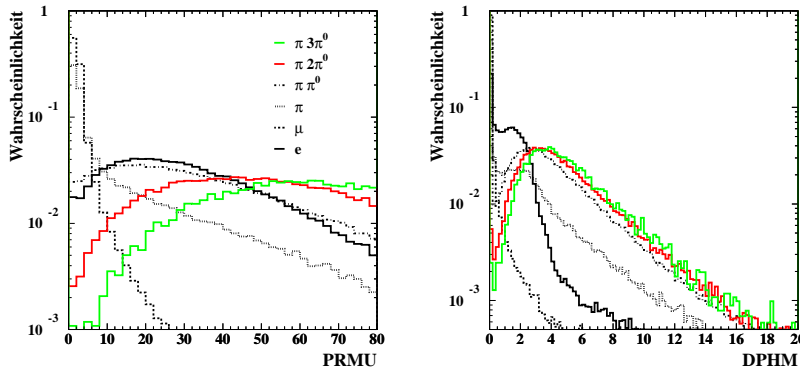


Abbildung 5.1: Referenz-Verteilungen für die einspurigen Zerfälle (Teil 1: Presampler-Variablen). Die abgebildeten Variablen werden im Text erläutert.

**EOVP** Die im elektromagnetischen Kalorimeter deponierte Energie, die zum Kegel assoziiert wurde, geteilt durch den Betrag des Spurimpulses  $E/p$ . Elektronen deponieren ihre gesamte Energie schließlich im ECAL und führen daher zu  $E/p$ -Werten um 1.0. Myonen hinterlassen im Mittel nur 420 MeV im ECAL. Die Impulse der Myonen im  $\tau$ -Zerfall sind aber meist größer. Die  $E/p$ -Werte sind für Myonen daher klein. Ein geladenes Pion deponiert ähnlich viel Energie im ECAL wie ein Myon, sofern es keinen hadronischen Schauer initiiert hat. In diesem Fall deponiert es — bei einer sehr breiten Streuung — im Mittel die Hälfte seiner Energie im ECAL. Wird das geladene Pion von einem oder mehr neutralen Pionen begleitet, werden Werte über 1.0 für  $E/p$  erreicht. Insgesamt ist  $E/p$  besonders zum Trennen der Elektronen von den anderen Teilchensorten geeignet.

**NB90** Die Anzahl der ECAL-Blöcke, in denen 90 % der zum Kegel assoziierten Energie deponiert wurden. Myonen durchqueren meist nur einen Block im Zentralbereich und dieser enthält dann auch die gesamte Energie. Der von einem Elektron gestartete elektromagnetische Schauer verteilt sich dagegen im Mittel auf 2.2 Blöcke. Löst ein geladenes Pion einen hadronischen Schauer im ECAL aus, ist die Anzahl der Blöcke, auf die sich die Energie verteilt, noch größer, da hadronische Schauer breiter sind als elektromagnetische. Sind außerdem neutrale Pionen im Zerfall erzeugt worden, ist die Anzahl der Blöcke mit 90 % der deponierten Energie wegen der räumlichen Entfernung der Photonen aus den  $\pi^0$ -Zerfällen ebenfalls groß. Die semihadronischen Kanäle werden daher durch diese Variable kaum getrennt, während diese insgesamt gut von Elektronen einerseits und Myonen andererseits zu unterscheiden sind. In der Abbildung 5.2 ist die um den Erwartungswert der Elektronen korrigierte Verteilung von NB90 dargestellt.

**XELS** Das Verhältnis der nicht zu einer Spur assoziierten Energie zur gesamten Energie, die dem Kegel zugeordnet wurde. Alle Zerfallsmodi ohne neutrale Pionen liefern hier sehr kleine Werte, während die Zerfälle, in denen mindestens ein  $\pi^0$  vorhanden ist, deutliche Ausläufer zu hohen Werten haben, so daß diese beiden Zerfallsklassen mit Hilfe von XELS unterschieden werden können.

**RSTL** Die Anzahl der Treffer pro Detektorlage im hadronischen Kalorimeter. Elektronen gelangen meist nicht bis zum HCAL, so daß der wahrscheinlichste Wert bei Null liegt. Myonen

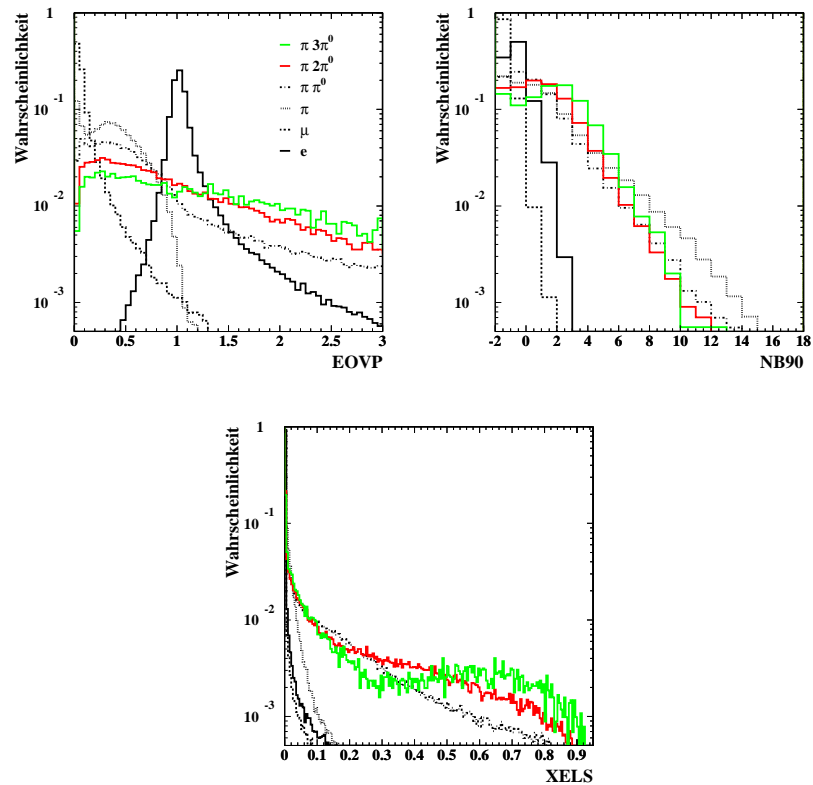


Abbildung 5.2: Referenz-Verteilungen für die einspurigen Zerfälle (Teil 2: ECAL- und Drift-Kammer-Variablen ohne Photon-Rekonstruktion). Die abgebildeten Variablen werden im Text erläutert.

durchqueren das HCAL und hinterlassen pro Lage im Mittel einen Treffer, während hadronische Endzustände spätestens hier einen Schauer ausbilden und deutlich mehr Treffer pro Lage auslösen. Diese und die folgenden zwei Variablen dienen der Identifikation von Myonen im Endzustand.

**NM7L** Die Anzahl der Treffer in den letzten drei Lagen des hadronischen Kalorimeters und den Myon-Kammern. Bis in die Myon-Kammern gelangen auch die meisten Hadronen nicht mehr, so daß gerade die Treffer hier und in den letzten Lagen des HCAL sensitiv auf Myonen sind.

**WMUO** Die Güte der Übereinstimmung zwischen der extrapolierten Spur und den Treffern in den Myon-Kammern. Hier wird der Logarithmus der Wahrscheinlichkeit benutzt, ein  $\chi^2$  für die Hypothese, daß die Treffer in den Myon-Kammern auf der extrapolierten Spur liegen, zu messen, das gleich gut oder schlechter als das beobachtete  $\chi^2$  ist.

**NPHO** Die Anzahl der rekonstruierten Photonen. Diese und die folgenden vier Observablen sollen die hadronischen Endzustände mit verschiedenen  $\pi^0$ -Multiplizitäten unterscheiden. Sie stammen aus der für diese Analyse entwickelten Photon-Rekonstruktion, die in Kapitel 4 bereits beschrieben wurde. In Abbildung 5.4 sind die Referenz-Verteilungen der Größen aus der Photon-Rekonstruktion im Zentralbereich für die hadronischen Zerfallsmodi dargestellt. Die wahrscheinlichste Anzahl rekonstruierter Photonen sollte doppelt so groß sein

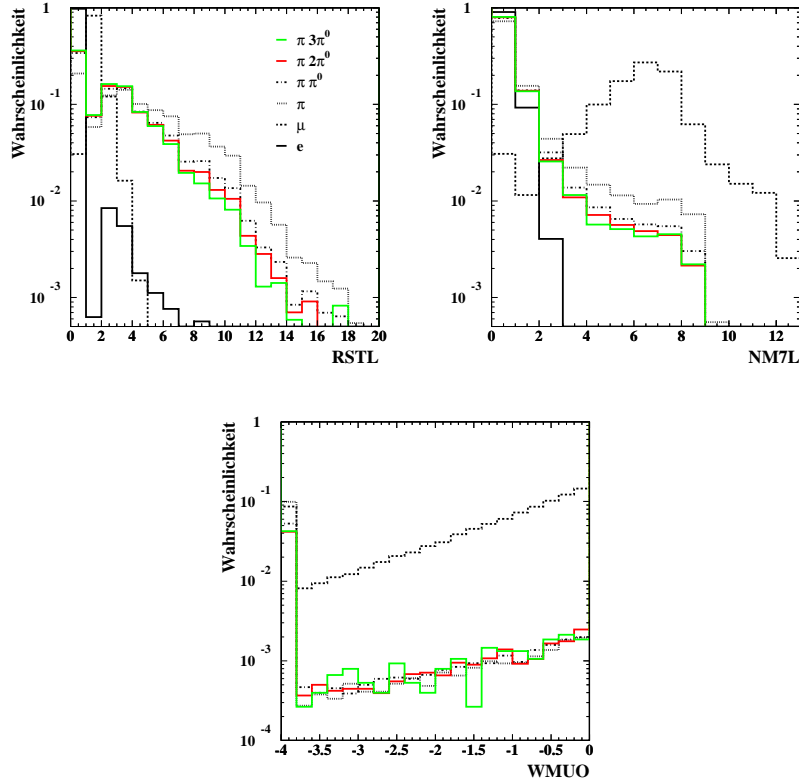


Abbildung 5.3: Referenz-Verteilungen für die einspurigen Zerfälle (Teil 3: HCAL- und Myon-Kammer-Variablen). Die abgebildeten Variablen werden im Text erläutert.

wie die Anzahl der neutralen Pionen. Für bis zu zwei  $\pi^0$  ist das auch der Fall, und nur für drei  $\pi^0$  im Endzustand ist die Wahrscheinlichkeit, fünf statt sechs Photonen zu rekonstruieren, größer. Die Granularität des ECAL begrenzt hier das Auflösungsvermögen.

MP12 Die invariante Masse zwischen den beiden Photonen mit der höchsten Energie. Ist ein  $\pi^0$  im Endzustand enthalten, erwartet man nur zwei rekonstruierte Photonen und ihre invariante Masse sollte bei der  $\pi^0$ -Masse liegen, während Photon-Kandidaten, die aus dem hadronischen Schauer eines Pions im ECAL rekonstruiert werden, meist zu kleineren invarianten Massen führen, da sie enger benachbart im ECAL liegen. Bei mehr als einem  $\pi^0$  im Endzustand gehören die beiden Photonen mit der höchsten Energie häufig zu verschiedenen  $\pi^0$ -Zerfällen und haben daher einen großen Abstand voneinander, der zu einer größeren invarianten Masse führt.

MP23 Die invariante Masse zwischen den Photonen mit der zweit- und dritthöchsten Energie. Während die Endzustände  $\pi$  und  $\pi\pi^0$  in dieser Größe ähnlich kleine Werte liefern, ist die Trennung zwischen  $\pi 2\pi^0$  und  $\pi 3\pi^0$  hiermit gut möglich, da bei zwei neutralen Pionen die Kombination dieser beiden Photonen häufig zum gleichen  $\pi^0$  gehört, bei drei neutralen Pionen die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden Photonen aus verschiedenen  $\pi^0$  stammen, aber größer ist.

EMAX Die Energie des Photons mit der höchsten Energie. Typischerweise sind die irrtümlich aus einem hadronischen Schauer rekonstruierten Photonen niederenergetischer als Photo-

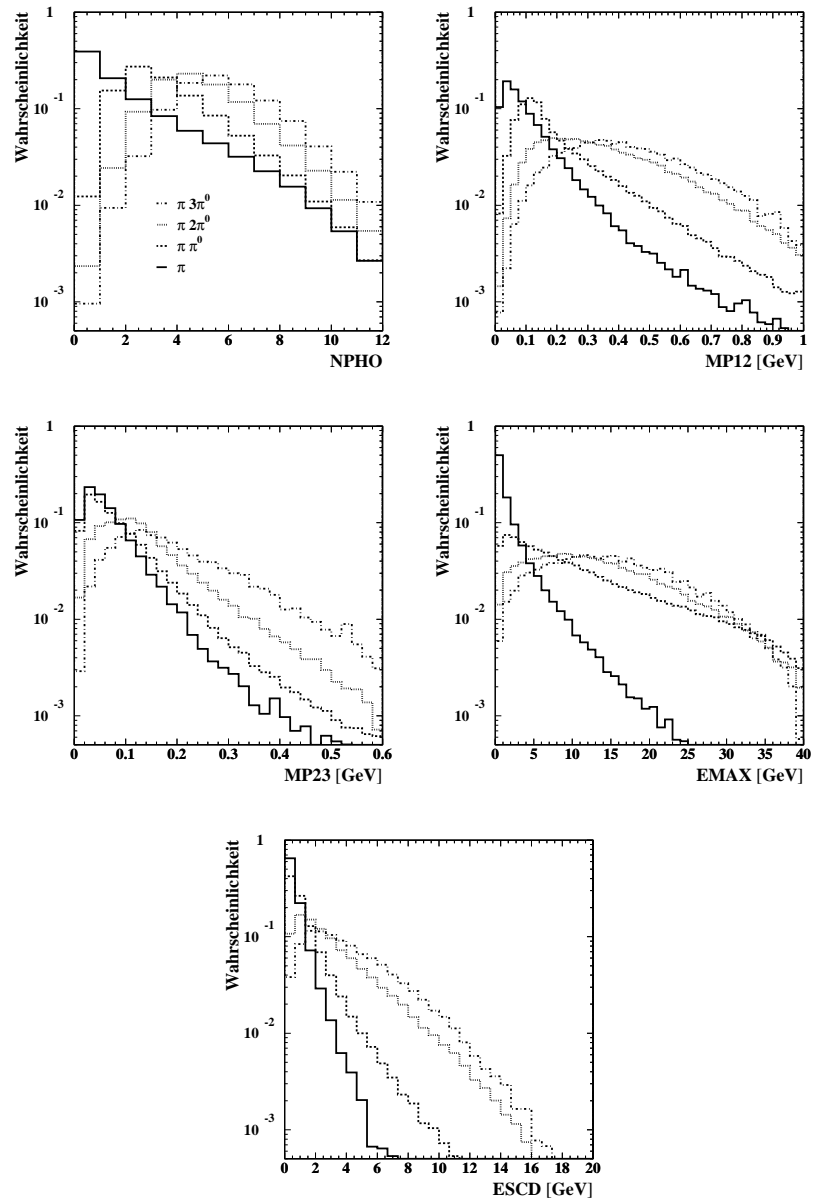


Abbildung 5.4: Referenz-Verteilungen für die einspurigen Zerfälle (Teil 4: ECAL-Variablen aus der Photon-Rekonstruktion). Die abgebildeten Variablen werden im Text erläutert.

nen aus dem  $\pi^0$ -Zerfall, so daß eine hohe Energie auf mindestens ein  $\pi^0$  im Endzustand schließen läßt.

**ESCD** Die Energie des Photons mit der zweithöchsten Energie. Bei mindestens zwei neutralen Pionen im Endzustand sind meist zwei Photonen mit einer relativ hohen Energie zu beobachten. Mit Hilfe dieser Observablen lassen sich die Zerfälle mit mindestens zwei neutralen Pionen von den Zerfällen mit weniger neutralen Pionen trennen.

Die in Gleichung (5.3) angegebene Gesamtwahrscheinlichkeit für die einzelnen Zerfallsmodi wird außerdem für einspurige Zerfälle durch die Information aus der Messung des spezifischen Energieverlusts in der Jet-Kammer  $dE/dx$  erweitert. Die Wahrscheinlichkeit, den gemessenen Wert für  $dE/dx$  zu erhalten, lautet für den  $j$ -ten Zerfallskanal:

$$p_j^{dE/dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\chi_j^2/2}, \quad (5.4)$$

mit

$$\chi_j = \frac{(dE/dx)_{\text{meas}} - (dE/dx)_{\text{theo}}^j}{\sigma}, \quad (5.5)$$

wobei  $(dE/dx)_{\text{meas}}$  den gemessenen Wert des spezifischen Energieverlusts angibt,  $(dE/dx)_{\text{theo}}^j$  der erwartete Wert für die  $j$ -te Teilchensorte ist und  $\sigma$  dem Fehler des Meßwertes entspricht. Für die hadronischen Kanäle wird aus den Vorhersagen für  $\pi$  und K die wahrscheinlichere ausgewählt, so daß an dieser Stelle nur  $e$ ,  $\mu$  und Hadronen unterschieden werden. Die Gesamtwahrscheinlichkeit für den  $j$ -ten Zerfallsmodus ergibt sich wieder aus dem normierten Produkt

$$p_j^{\text{tot}} = \frac{p_j p_j^{dE/dx}}{\sum_{k=1}^N p_k p_k^{dE/dx}}. \quad (5.6)$$

Die acht dreispurigen Kanäle werden mit fünf Referenz-Verteilungen unterschieden, die ebenfalls für den Zentralbereich des Detektors in Abbildung 5.5 dargestellt sind und hier kurz erläutert werden:

**PPIP** Die Wahrscheinlichkeit, daß die drei Spuren von Pionen stammen. Der Wert wird aus den spezifischen Energieverlustmessungen in der Jet-Kammer,  $dE/dx$ , für die drei Spuren bestimmt, wobei die Wahrscheinlichkeit für die Hypothese, daß alle drei Spuren von Pionen stammen, auf die Summe der Wahrscheinlichkeiten für diese und die beiden Hypothesen, daß zwei der Spuren von einem Elektron-Positron-Paar verursacht wurden, normiert wird.

**VTXF** Die Wahrscheinlichkeit, das gemessene oder ein schlechteres  $\chi^2$  in der Anpassung eines gemeinsamen Vertex an die drei Spuren zu erhalten. Sind zwei der Pionen erst durch den Zerfall eines  $K_S^0$  entstanden, kann nicht mehr für alle drei Spuren ein gemeinsamer Vertex gefunden werden und die Wahrscheinlichkeit, daß ein gemeinsamer Vertex vorhanden ist, wird entsprechend klein. Mit dieser Größe kann daher ein Großteil der Zerfälle, in denen sich neutrale Kaonen befinden, unterdrückt werden.

**ESPS** Die gesamte zum Kegel assoziierte Energie, normiert auf die Summe der Impulsbeträge aller Spuren im Kegel. Wie bei der ähnlich konstruierten Variablen EOVP für die einspurigen Zerfälle kann mit ESPS zwischen Zerfällen mit neutralen Pionen und ohne neutrale Pionen im Endzustand unterschieden werden.

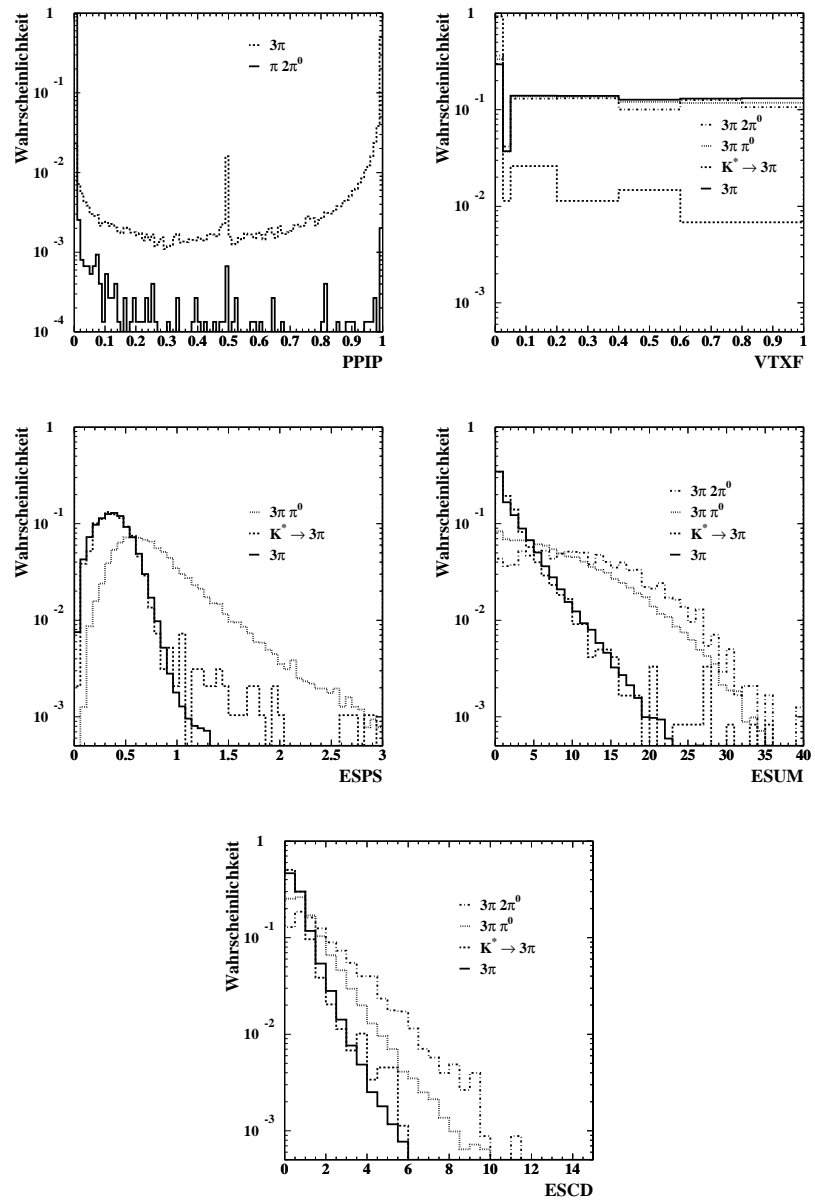


Abbildung 5.5: Referenz-Verteilungen für die dreispurigen Zerfälle. Die abgebildeten Variablen werden im Text erläutert.

**ESUM** Die Summe der Energien aller im Kegel rekonstruierten Photonen. Diese und die nächste Observable stammen ebenfalls aus der Photon-Rekonstruktion (siehe Kapitel 4). Da in der Photon-Rekonstruktion bereits teilweise auf die von den geladenen Pionen im ECAL deponierte Energie korrigiert wird, ist ESUM noch sensitiver auf neutrale Pionen im Endzustand als ESPS.

**ESCD** Die Energie des Photons mit der zweithöchsten Energie. In Abbildung 5.5 ist außer den Kanälen  $3\pi$  (ohne  $K_S^0$ ),  $3\pi$  (mit  $K_S^0$ ) und  $3\pi\pi^0$  auch der Kanal  $3\pi 2\pi^0$  abgebildet, da diese Variable das höchste Trennungsvermögen zwischen den beiden Kanälen mit neutralen Pionen besitzt. Das Trennungsvermögen ist aber immer noch zu gering, um so mit hinreichender Effizienz den Kanal  $3\pi 2\pi^0$  selektieren zu können, ohne die Effizienz der  $3\pi\pi^0$ -Selektion zu verkleinern. Ein separater Kanal für die Selektion des Endzustands  $3\pi 2\pi^0$  ist daher nicht eingeführt worden.

### 5.3 Anwendung der Selektion auf die Daten

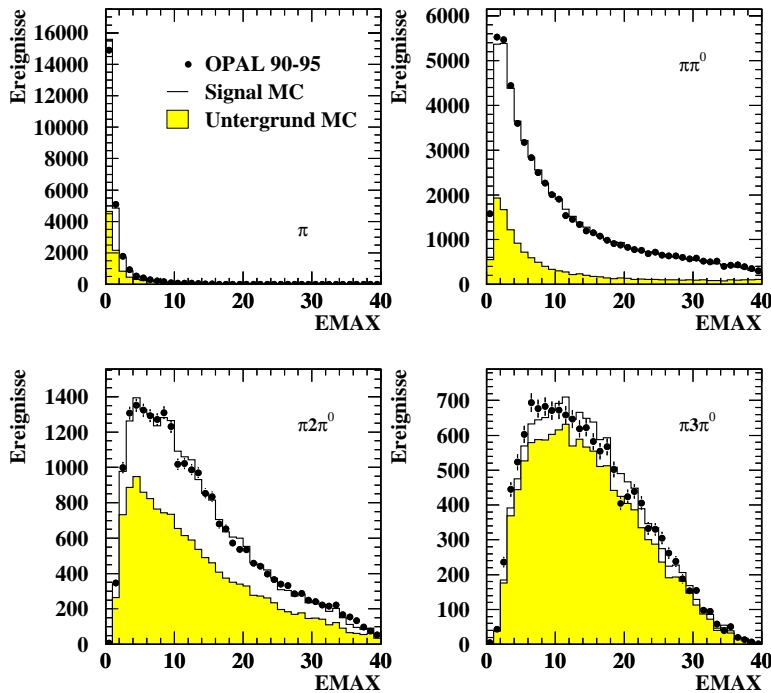


Abbildung 5.6: Vergleich der selektierten Daten mit der Vorhersage aus simulierten Ereignissen (MC) für einspurige hadronische Zerfälle.

In den Abbildungen 5.6 und 5.7 ist ein Vergleich zwischen den mit diesen Referenz-Verteilungen selektierten Daten und den auf dieselbe Weise selektierten Ereignissen aus der Simulation in einer der Referenz-Größen (EMAX für einspurige Zerfälle und ESUM für dreispurige Zerfälle) dargestellt, wobei der gesamte Detektorbereich bis  $|\cos\theta| < 0.95$  benutzt wurde. In der  $\pi\pi^0$ -Selektion wird allerdings ein größerer Bereich in den Endkappen verworfen, um den in diesem Kanal



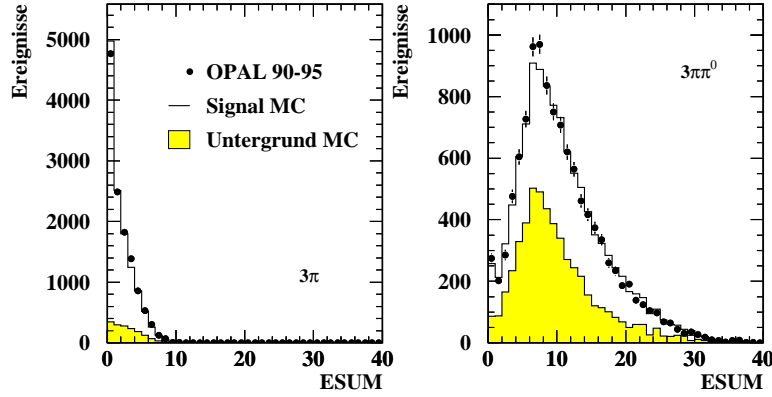


Abbildung 5.7: Vergleich der selektierten Daten mit der Vorhersage aus simulierten Ereignissen (MC) für dreispurige hadronische Zerfälle.

besonders hohen Restuntergrund aus  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ -Ereignissen zu reduzieren. Der dargestellte Untergrund setzt sich in allen Verteilungen sowohl aus fehlidentifizierten  $\tau$ -Zerfällen, als auch aus den anderen Untergrundquellen zusammen. In allen Fällen wird eine gute Übereinstimmung der Daten mit der Vorhersage erzielt.

Zerfälle, in denen statt eines geladenen Pions ein Kaon auftritt, werden mit einem Schnitt auf den spezifischen Energieverlust in der Jet-Kammer  $dE/dx$  unterdrückt. Einspurige Zerfälle, in denen die Größe

$$\text{WKPI} = \frac{p_K^{\frac{dE}{dx}} - p_\pi^{\frac{dE}{dx}}}{\max \left\{ p_K^{\frac{dE}{dx}}, p_\pi^{\frac{dE}{dx}} \right\}}, \quad (5.7)$$

mit den in (5.4) definierten  $p_j^{\frac{dE}{dx}}$ , kleiner als  $-0.9$  ist, werden verworfen. In Abbildung 5.8 ist links für die einspurigen Zerfälle diese Größe dargestellt. Nach diesem Schnitt gehen nur 3.3% aller in den hadronischen Zerfallskanälen selektierten Ereignisse verloren, aber 61.9% aller Zerfälle, in denen ein geladenes Kaon vorhanden ist, werden so unterdrückt.

Ganz ähnlich wird in den dreispurigen Zerfällen verfahren. Wenn für mindestens eine der drei Spuren  $\text{WKPI} < -0.9$  ist, wird der Zerfall verworfen. Auf der rechten Seite in Abbildung 5.8 ist die Verteilung des je kleinsten WKPI für selektierte dreispurige Zerfälle dargestellt. Anders als bei den einspurigen Zerfällen, ist die Übereinstimmung der Verteilung aus den Daten mit der Verteilung aus den simulierten Ereignissen nicht gut. Insgesamt scheinen hier geladene Pionen häufiger zu  $dE/dx$ -Werten zu führen, die in der Nähe des Erwartungswertes für geladene Kaonen liegen [62]. Während von den simulierten Ereignissen durch den Schnitt bei  $-0.9$  nur 5.2% der Ereignisse verloren gehen und 54.2% der Zerfälle mit Kaonen unterdrückt werden, werden in den Daten tatsächlich 9.8% der Zerfälle verworfen. Der verbleibende K-Untergrund in den dreispurigen Ereignissen (etwa 1.4%) wird damit um bis zu 5% überschätzt. Allerdings ist die Unsicherheit auf das Verzweungsverhältnis  $B(\tau^- \rightarrow \nu_\tau K^- h^+ \pi^-) = 0.225 \pm 0.063\%$  [1], das die Zerfallsrate des  $\tau$ -Leptons in die hier selektierten Zerfälle mit geladenen Kaonen angibt, mit 28% bereits so groß, daß die Unsicherheit von 5% aufgrund der  $dE/dx$ -Selektion vernachlässigt werden kann. Für die Endzustände  $\pi 3\pi^0$  und  $3\pi 2\pi^0$  sind die Verzweungsverhältnisse entsprechender Kanäle mit einem geladenen Kaon statt eines Pions so klein, daß eine explizite

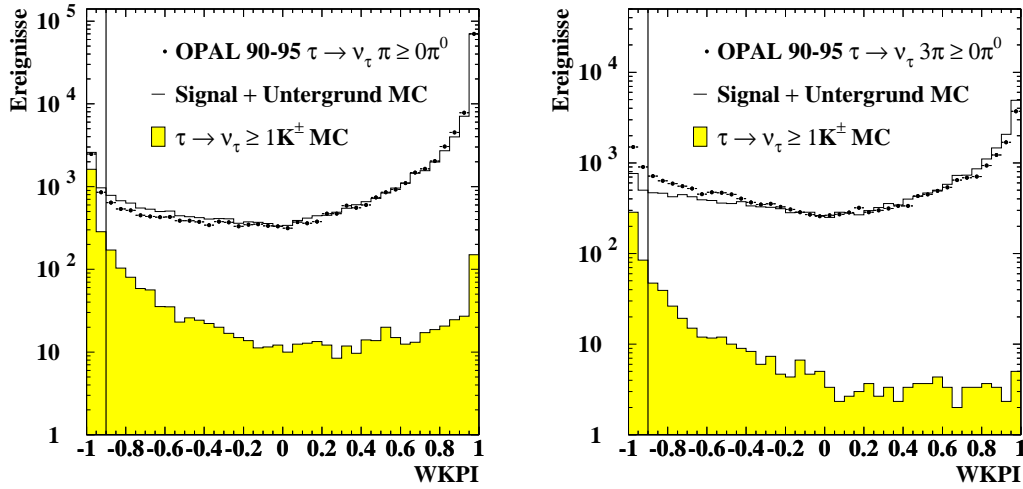


Abbildung 5.8: Unterdrückung geladener Kaonen im Endzustand.

Unterdrückung durch den Schnitt auf WKPI unnötig ist.

Ein weiteres Selektionskriterium ist die Gesamtwahrscheinlichkeit für den betrachteten Kanal aus der MLS. Je nach Nachweiswahrscheinlichkeit und Untergrundanteil muß dieser Wert individuell angepaßt werden. Teilweise enthalten Selektionskanäle besonders viel Untergrund von einem anderen Signalkanal, so daß beide Endzustände durch eine unterschiedliche Wahl der Anzahl rekonstruierter neutraler Pionen und/oder verschiedener Intervalle für die Wahrscheinlichkeit, die dieser Kanal in der MLS erhalten hat, selektiert werden können.

Kanal	selektiert in	$p_j$	$ \cos \theta $	WKPI	$N_{\pi^0}$
$\pi$	$\pi$	$> 0.90$	$< 0.95$	$> -0.90$	0
$\pi\pi^0$	$\pi\pi^0$	$> 0.55$	$< 0.90$	$> -0.90$	1
$\pi 2\pi^0$	$\pi 2\pi^0$	$> 0.50$	$< 0.95$	$> -0.90$	2
$\pi 2\pi^0$	$\pi 3\pi^0$	$< 0.80$	$< 0.95$	$> -0.90$	2
$\pi 3\pi^0$	$\pi 3\pi^0$	$> 0.80$	$< 0.95$	—	3
$3\pi(\text{ohne } K_S^0)$	$3\pi(\text{ohne } K_S^0)$	$> 0.50$	$< 0.95$	$> -0.90$	0
$3\pi(\text{ohne } K_S^0)$	$3\pi(\text{mit } K_S^0)$	$< 0.80$	$< 0.95$	$> -0.90$	0
$3\pi\pi^0$	$3\pi\pi^0$	$> 0.70$	$< 0.95$	$> -0.90$	1
$3\pi 2\pi^0$	$3\pi\pi^0$	$> 0.70$	$< 0.95$	—	2

Tabelle 5.1: Selektionskriterien für die hadronischen Endzustände im  $\tau$ -Zerfall. In der ersten Spalte ist der Endzustand angegeben, der selektiert werden soll. Die zweite Spalte gibt den Kanal an, für den die MLS die größte Wahrscheinlichkeit berechnet hat. Das Intervall, in dem die Wahrscheinlichkeit aus der MLS für den selektierten Kanal liegen soll, ist in der dritten Spalte eingetragen. Die vierte Spalte enthält den Schnitt auf die Richtung der Kegelachse. Der Schnitt gegen die geladenen Kaonen im Endzustand befindet sich in der fünften Spalte. Die letzte Spalte enthält schließlich die verlangte Anzahl rekonstruierter  $\pi^0$  im Endzustand.

Für die verschiedenen Zerfallskanäle mit keinem  $\pi^0$ , einem  $\pi^0$  oder zwei neutralen Pionen im Endzustand werden schließlich exakt die erwartete Anzahl rekonstruierter  $\pi^0$  verlangt, da zum einen die Rekonstruktion der Masse des hadronischen Systems mit einer möglichst gu-

ten Auflösung erfolgen soll, und zum anderen eine möglichst gute Trennung der Endzustände, die dem Vektorstrom zuzurechnen sind (im wesentlichen die Kanäle mit einer geraden Anzahl Pionen) von den Endzuständen, die dem Axialvektorstrom zuzurechnen sind (im wesentlichen die Kanäle mit einer ungeraden Anzahl Pionen) erzielt werden soll. Die Rekonstruktion neutraler Pionen wird in Abschnitt 5.4 beschrieben.

In Tabelle 5.1 sind die einzelnen Selektionskriterien für die betrachteten hadronischen Kanäle zusammengestellt. Nach dieser Selektion bleiben insgesamt 65899  $\tau$ -Kandidaten in den drei einspurigen Kanälen  $\pi\pi^0$ ,  $\pi2\pi^0$  und  $\pi3\pi^0$  sowie den drei dreispurigen Kanälen  $3\pi$ ,  $3\pi\pi^0$  und  $3\pi2\pi^0$  übrig<sup>5</sup>. Der geschätzte Untergrundanteil beträgt 26.6 % und enthält sowohl die fehlidentifizierten Endzustände aus  $\tau$ -Zerfällen, als auch den verbleibenden Untergrundanteil von 0.8 % aus Ereignissen, die nicht aus  $\tau$ -Paaren bestehen. In Tabelle 5.2 sind für diese Kanäle die Nachweiswahrscheinlichkeiten und Untergrundanteile angegeben. Dabei wird unterschieden zwischen „korreliertem“ Untergrund, der fehlidentifizierte  $\tau$ -Zerfälle umfaßt, die zu einem der anderen betrachteten einspurigen (dreispurigen) Kanäle gehören und in einen einspurigen (dreispurigen) Signalkanal nachgewiesen wurden, und „unkorreliertem“ Untergrund, der alle anderen  $\tau$ -Zerfälle und den Untergrund enthält, der nicht aus  $\tau$ -Paaren stammt. In Kapitel 6 wird auf die Behandlung des korrelierten Untergrunds detailliert eingegangen.

Kanal	Nachweiswahrscheinlichkeit	korrelierter Untergrund	unkorrelierter Untergrund	Anzahl
$\pi\pi^0$	$(28.7 \pm 0.1) \%$	$(7.7 \pm 0.2) \%$	$(7.9 \pm 0.1) \%$	32316
$\pi2\pi^0$	$(18.8 \pm 0.1) \%$	$(45.0 \pm 0.6) \%$	$(8.4 \pm 0.1) \%$	13814
$\pi3\pi^0$	$(8.0 \pm 0.2) \%$	$(70.0 \pm 2.2) \%$	$(11.4 \pm 0.5) \%$	1738
$3\pi$	$(34.6 \pm 0.1) \%$	$(9.7 \pm 0.3) \%$	$(3.8 \pm 0.1) \%$	14321
$3\pi\pi^0$	$(11.0 \pm 0.1) \%$	$(21.3 \pm 1.0) \%$	$(6.1 \pm 0.3) \%$	2455
$3\pi2\pi^0$	$(8.3 \pm 0.4) \%$	$(82.3 \pm 2.9) \%$	$(7.1 \pm 0.5) \%$	1255

Tabelle 5.2: *Nachweiswahrscheinlichkeit, Untergrundanteile und Gesamtanzahl selektierter  $\tau$ -Kandidaten.*

## 5.4 Rekonstruktion neutraler Pionen

Ausgehend von den rekonstruierten Photonen aus den Zerfällen der  $\pi^0$ -Mesonen in hadronischen Endzuständen des  $\tau$ -Zerfalls, mit der in Kapitel 4 beschriebenen Methode, lassen sich Anzahl, Impuls und Flugrichtung der neutralen Pionen im Endzustand bestimmen. Hierfür werden alle möglichen Paarungen der gefundenen Photonen überprüft. Bei  $N$  gefunden Photonen in einem Kegel ist die Anzahl der Möglichkeiten aus  $2n$  Photonen  $n \leq N/2$  Paare zu bilden

$$M_n^N = \binom{N}{2n} \frac{(2n)!}{n! 2^n}. \quad (5.8)$$

Für jedes  $n = 1, 2, \dots, N/2$  wird die beste Kombination, also die mit der kleinsten mittleren, absoluten Abweichung von  $m_{\pi^0}$  für jedes Paar, ausgewählt. Von diesen  $N/2$  besten Kombinationen wird schließlich die ausgewählt, die zu der größten Anzahl  $\pi^0$ -Mesonen, bei einer mittleren,

<sup>5</sup> Der Endzustand  $\pi$  wird hier nicht mehr mitgezählt, da er für die Massenrekonstruktion ohne Belang ist. Für die anschließende Analyse werden nur die Masse des Pions und das Verzweungsverhältnis  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^-$  benötigt, die beide gut bekannt sind [1].

absoluten Abweichung der rekonstruierten Massen von der nominellen  $\pi^0$ -Masse von weniger als  $1.5\sigma$ , führt. Den Fehler  $\sigma$  der rekonstruierten Masse erhält man dabei aus der Anpassung der Parameter der Photonen in der Photon-Rekonstruktion. Die Vierervektoren der  $\pi^0$  werden aus den Impulsen der Photonen der besten Kombinationen berechnet, nachdem sie mit einer weiteren kinematischen Anpassung, unter der Zwangsbedingung, daß die Masse jedes Photonen-Paares exakt die Masse des  $\pi^0$  ergeben muß, korrigiert wurden.

Im  $\pi\pi^0$ -Kanal ist die sauberste Rekonstruktion neutraler Pionen möglich. Eine besonders untergrundarme Selektion erhält man, wenn man genau zwei rekonstruierte Photonen mit einer Mindestenergie von 0.5 GeV in einem Kegel verlangt, der nach der MLS im  $\pi\pi^0$ -Kanal identifiziert worden ist (wobei hier keine Variablen aus der Photon-Rekonstruktion zur Selektion benutzt worden sind). In Abbildung 5.9 ist links die Verteilung der invarianten Masse der Photonen-Paare in diesen Ereignissen dargestellt (ohne Korrekturen durch die  $m_{\pi^0}$ -Zwangsbedingung). Auf der rechten Seite ist die Verteilung des „Pulls“, der die Abweichung der rekonstruierten Masse von der Masse des neutralen Pions in Einheiten des Fehlers der rekonstruierten Masse angibt, abgebildet. Sind alle Fehlerquellen statistischer Natur und ist die Größe jeder Fehlerquelle richtig

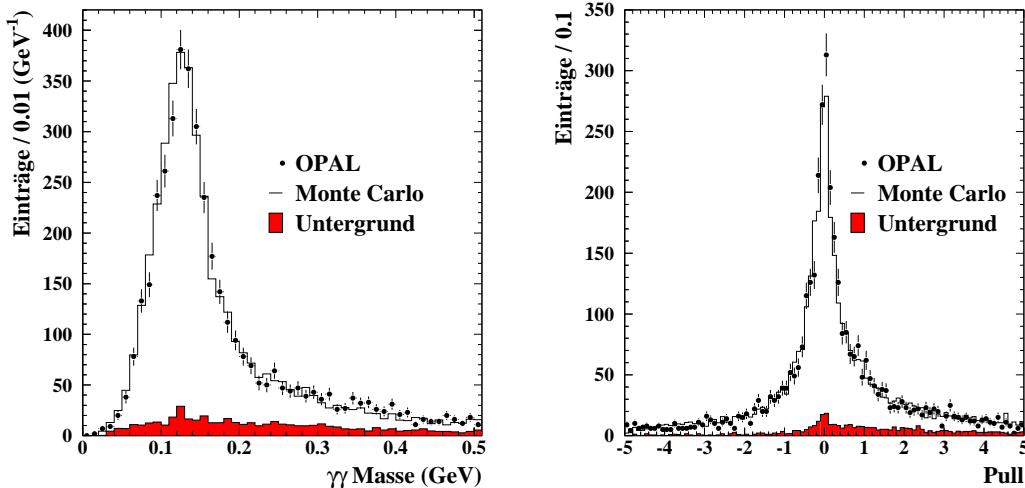


Abbildung 5.9: Die invariante  $\gamma\gamma$ -Masse in  $\pi\pi^0$ -Zerfällen, in denen zwei Photonen mit einer Mindestenergie von 0.5 GeV rekonstruiert wurden (links) und die Pull-Verteilung derselben Ereignisse (rechts). OPAL-Daten sind als Punkte dargestellt. Die Vorhersage aus der Simulation ist durch die transparente Verteilung gegeben und die dunkle Verteilung entspricht dem Untergrund aus  $\tau$ -Paaren sowie sonstigen Untergrundquellen.

abgeschätzt, erwartet man für die Form der Verteilung des Pulls eine Gauß-Funktion mit dem Mittelwert bei 0.0 und der Streuung 1.0. Die Pull-Verteilung in Abbildung 5.9 zeigt dagegen ein anderes Verhalten. Paßt man eine Doppel-Gauß-Verteilung an die Daten an, ergibt sich, daß für etwa 45 % der rekonstruierten  $\pi^0$  der Fehler überschätzt wird. Diese Ereignisse bilden die schmale Verteilung um 0.0 mit der Streuung  $\sigma = 0.32$ . Für die anderen 55 % wird der Fehler unterschätzt und hier sind die Ereignisse um 0.5 mit einer Streuung von  $\sigma = 2.2$  verteilt. Die absolute Größe der Streuung ist hier allerdings nicht wichtig, da eine Variation des angenommenen Fehlers von 100 MeV auf die gemessenen Energien in den ECAL-Blöcken eine proportionale Änderung der Fehler der  $\gamma\gamma$ -Massen ergäbe. Für die  $\pi^0$ -Rekonstruktion wird daher eine Abweichung des Pulls von weniger als 1.5 verlangt, so daß nur die Klasse der gut rekonstruierten neutralen Pionen, die der schmalen Pull-Verteilung entspricht, berücksichtigt wird.

Als weiteres Qualitätskriterium der neutralen Pionen werden im Falle der einspurigen Zerfälle mindestens  $0.7\text{ GeV}$  für die Energie eines  $\pi^0$  verlangt und im Falle dreispuriger Zerfälle muß die Energie des  $\pi^0$  mindestens  $2.0\text{ GeV}$  betragen, da hier die Anzahl der Photonen, die aus den hadronischen Wechselwirkungen der geladenen Pionen im ECAL rekonstruiert wurden, größer ist als bei den einspurigen Zerfällen. Die Massen der so selektierten Ereignisse im  $3\pi\pi^0$ -Kanal sowie deren Pull-Verteilung sind in Abbildung 5.10 dargestellt (ebenfalls ohne Korrekturen durch die  $m_{\pi^0}$ -Zwangsbedingung). Die Pull-Verteilung ist bei  $\pm 1.5$  abgeschnitten, und folgt innerhalb dieser Grenzen einem etwas schmaleren Verlauf als die Verteilung des Pulls für die einspurigen Zerfälle in Abbildung 5.9, da diese Größe hier bereits zur Auswahl der besten Kombination aus zwei Photonen benutzt worden ist. Die Verteilung der rekonstruierten Massen ist im Vergleich zu der Verteilung für einspurige Zerfälle erwartungsgemäß etwas breiter, da mit zunehmender Aktivität im ECAL das Auflösungsvermögen für einzelne Photonen abnimmt.

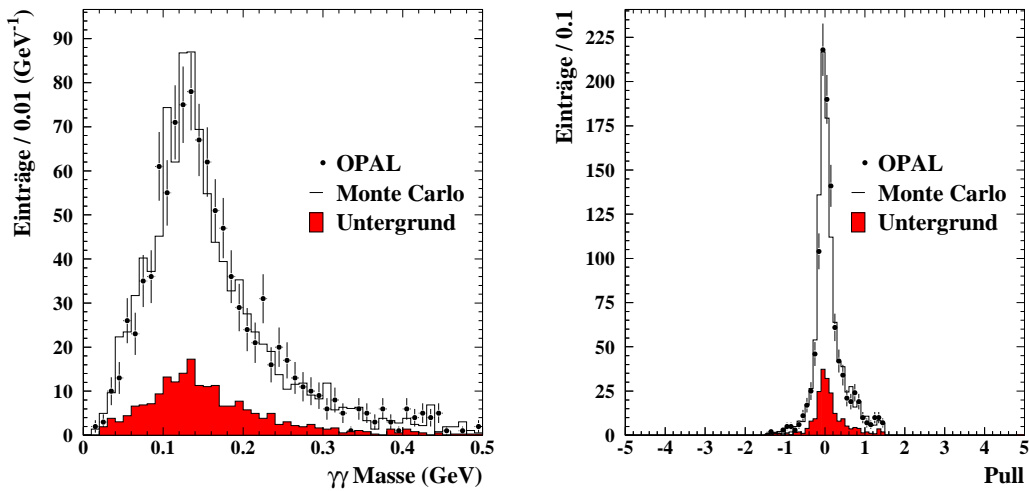


Abbildung 5.10: Die invariante  $\gamma\gamma$ -Masse in  $3\pi\pi^0$ -Zerfällen, in denen ein  $\pi^0$  mit einer Mindestenergie von  $2.0\text{ GeV}$  rekonstruiert wurde (links) und die Pull-Verteilung derselben Ereignisse (rechts). In der  $\pi^0$ -Rekonstruktion wird die  $\gamma\gamma$ -Kombination mit dem kleinsten Pull ausgesucht und verworfen, falls der Pull größer als  $1.5$  ist. OPAL-Daten sind als Punkte dargestellt. Die Vorhersage aus der Simulation ist durch die transparente Verteilung gegeben und die dunkle Verteilung entspricht dem Untergrund aus  $\tau$ -Paaren sowie sonstigen Untergrundquellen.

Die Granularität des elektromagnetischen Kalorimeters erlaubt die Rekonstruktion beider Photonen eines zerfallenden  $\pi^0$  nur dann, wenn dessen Energie kleiner als  $12\text{ GeV}$  ist. Neutrale Pionen mit höheren Energien führen zu Photonen, die im ECAL so eng benachbart liegen, daß sie nicht getrennt aufgelöst werden und als ein Photon rekonstruiert werden. Im Anschluß an die Bestimmung der besten Zwei-Photon-Kombinationen werden die verbleibenden Photonen, deren Energien über  $12\text{ GeV}$  liegen, als zusätzliche  $\pi^0$ -Kandidaten behandelt. Der Impuls eines solchen  $\pi^0$ -Kandidaten wird aus der um die Masse des Pions korrigierten Energie des Photons berechnet.

In Abbildungen 5.11 und 5.12 sind die Verteilungen der Anzahl rekonstruierter  $\pi^0$  nach den hier vorgestellten Kriterien für die ein- und dreispurigen hadronischen Zerfallskanäle des  $\tau$ -Leptons dargestellt. Alle Selektionsschnitte, bis auf den Schnitt auf die  $\pi^0$ -Anzahl, sind hier angewandt worden.

Die Häufigkeitsverteilungen der  $\pi^0$ -Anzahlen aus den Daten werden durch die Simulation

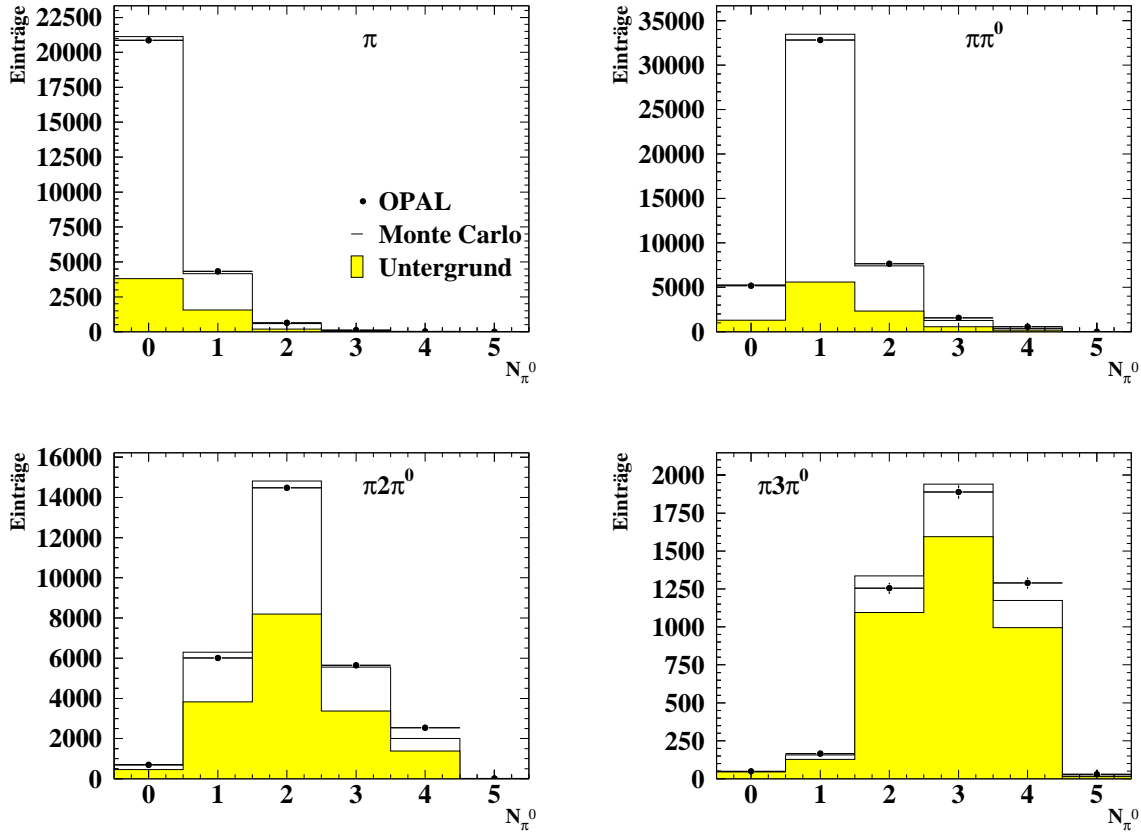


Abbildung 5.11: Verteilungen der rekonstruierten  $\pi^0$ -Anzahl für einspurige hadronische  $\tau$ -Zerfälle. OPAL-Daten sind als Punkte wiedergegeben; Die Vorhersage der Simulation ist als transparente Verteilung dargestellt und der erwartete Untergrundanteil aus  $\tau$ -Zerfällen und anderen Untergrundquellen entspricht der farbigen Fläche.

insgesamt gut beschrieben. Die Abweichungen der Daten von der Vorhersage liegen für die selektierenden Intervalle zwischen 0.2% und 3.2%. Damit ergibt sich eine zusätzliche Unsicherheit auf den Untergrundanteil in derselben Größenordnung, der in der Entfaltung (siehe Kapitel 6) der Massenspektren kompensiert wird, da hier die Untergrundanteile in jedem Signalspektrum mit angepaßt werden. Die letzte Verteilung in Abbildung 5.12, die dem Kanal  $3\pi 2\pi^0$  entspricht, ist identisch mit der  $3\pi\pi^0$ -Verteilung, da in der MLS kein separater Kanal für den Endzustand  $3\pi 2\pi^0$  eingerichtet wurde. Trotzdem werden auch hier schließlich disjunkte Datensätze selektiert, da das Intervall, das zu  $N_{\pi^0} = 1$  gehört, nur in die  $3\pi\pi^0$ -Selektion eingeht, während das zu  $N_{\pi^0} = 2$  gehörende Intervall der  $3\pi 2\pi^0$ -Selektion vorbehalten bleibt.

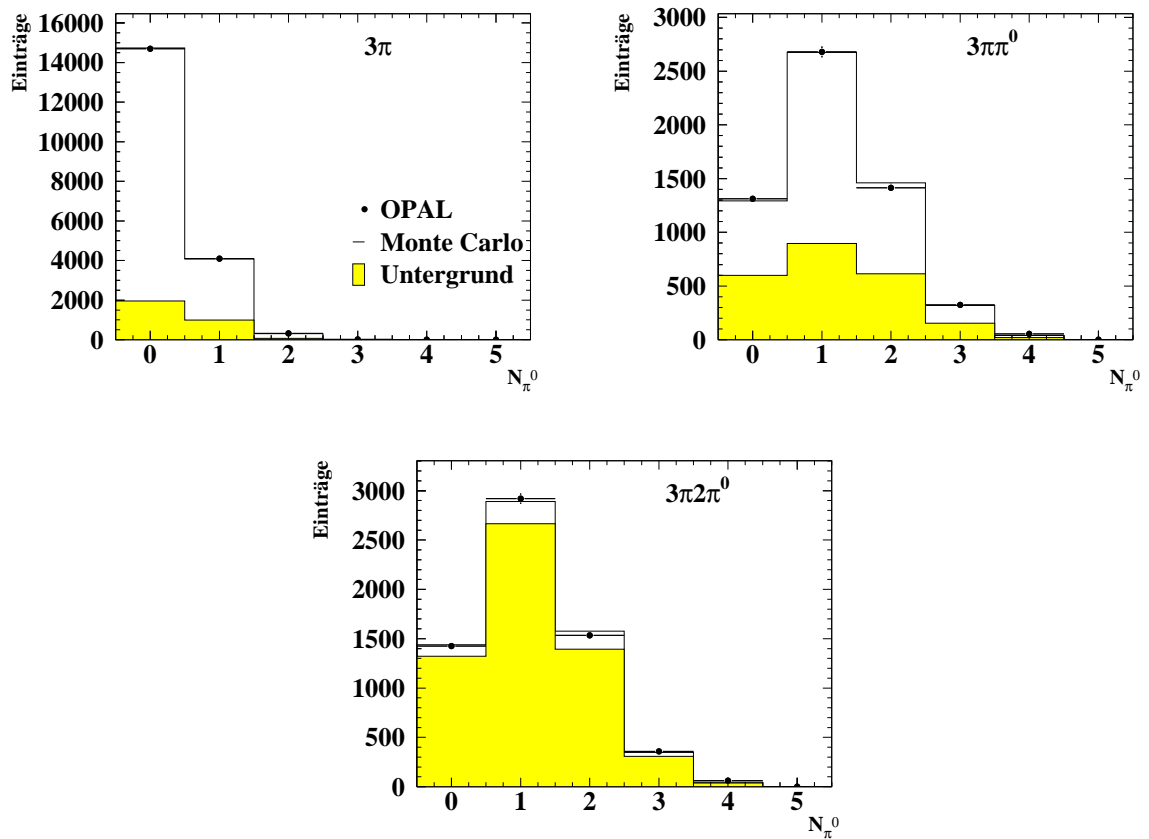


Abbildung 5.12: Verteilungen der rekonstruierten  $\pi^0$ -Anzahl für dreispurige hadronische  $\tau$ -Zerfälle. OPAL-Daten sind als Punkte wiedergegeben. Die Vorhersage der Simulation ist als transparente Verteilung dargestellt und der erwartete Untergrundanteil aus  $\tau$ -Zerfällen und anderen Untergrundquellen entspricht der farbigen Fläche.





WENN SICH

Wenn sich, nachtbedingt erkaltet,  
Wiesen morgendlich erwärmen  
und der Herr die Dame faltet,  
um zur Arbeit auszuschwärmen,

um sich lebend, lobend, labend,  
weltverloren zu erneuen —

Wird er liebend noch am Abend  
die Entfaltete erfreuen.

*Robert Gernhardt*

## 6. Entfaltung

### 6.1 Motivation

Im Anschluß an die Selektion erhält man für jeden selektierten Kanal ein Spektrum des Massenquadrates,  $s = q^2$ , des hadronischen Endzustands, indem die Vierervektoren der geladenen Pionen, die aus den in der Driftkammer gemessenen Impulsen und Winkeln der Spuren berechnet werden, und die Vierervektoren der neutralen Pionen, deren Rekonstruktion in den Kapiteln 4 und 5 beschrieben wurde, zu einem Vierervektor  $q$  addiert werden. Die direkte Nutzung dieser Spektren, um die Spektralfunktionen im  $\tau$ -Zerfall — und damit auch die Momente von  $R_\tau$  — zu extrahieren, ist aber nicht möglich. Zum einen sind die unterschiedlichen Nachweiswahrscheinlichkeiten der selektierten Kanäle zu berücksichtigen, und zum anderen verfügt der Detektor nur über ein begrenztes Auflösungsvermögen in  $s$ , so daß die gemessenen Spektren gegenüber den wahren Verteilungen in  $s$  deformiert sind. Ein typischer Auflösungseffekt ist z.B., daß auch Massenquadrate rekonstruiert werden, die über die kinematische Grenze  $s = m_\tau^2$  hinausgehen. Fehlidentifizierte  $\tau$ -Zerfälle, die zu Zerfallskanälen gehören, die ebenfalls selektiert werden sollen, sind teilweise als Untergrund in „benachbarten“ Kanälen enthalten, die eine andere Anzahl neutraler Pionen im Endzustand haben. Dadurch entstehen Korrelationen zwischen den gemessenen Spektren, wenn man die Spektren in die beitragenden Kanäle aufteilt. In diesem Kapitel wird eine Methode vorgestellt, mit der sowohl eine Berücksichtigung des endlichen Auflösungsvermögens des Detektors sowie der begrenzten Nachweiswahrscheinlichkeit für die selektierten Kanäle als auch die korrekte Behandlung der Korrelationen zwischen den gemessenen Spektren möglich ist. Es handelt sich um eine „regularisierte Entfaltungsmethode“, die in den Grundzügen aus [63] übernommen worden ist und um die Möglichkeit einer simultanen Entfaltung korrelierter Spektren erweitert wurde.

### 6.2 Methode

Den generellen Zusammenhang zwischen einer Verteilung  $g(y)$  in einer gemessenen Größe  $y \equiv s_{\text{meas}}$  und einer Verteilung  $f(x)$  in der zu  $y$  korrespondierenden wahren Größe  $x \equiv s_{\text{true}}$ , kann mit einem Faltungsintegral beschrieben werden:

$$g(y) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx A(y, x) \epsilon(x) f(x) + b(y), \quad (6.1)$$

in dem  $A(y, x)$  die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, den Meßwert  $y$  aus dem Detektor zu erhalten, wenn  $x$  vorliegt und der Detektor überhaupt ein  $y$  nachgewiesen hat. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei einem bestimmten  $x$  das Ereignis überhaupt nachgewiesen wird, ist hier durch  $\epsilon(x)$  gegeben, und den möglichen Untergrund der gemessenen Verteilung liefert  $b(y)$ . Die Grenzen des Integrals  $x_{\min}$  und  $x_{\max}$  schränken den physikalisch möglichen Bereich der Größe  $x$  z.B. durch kinematische Randbedingungen ein. Für die simulierten Ereignisse kennt man nun alle beteiligten Größen, die in dem Integral vorkommen, während in den Daten nur die Verteilung  $g(y)$  bekannt ist. Die Entfaltung besteht nun darin, aus den simulierten Ereignissen zunächst die Detektorfunktion  $A(y, x)$ , die Nachweiswahrscheinlichkeit  $\epsilon(x)$  und den erwarteten Untergrund  $b(y)$

zu bestimmen, um dann eine Funktion  $f(x)$  über das Faltungsintegral (6.1) an die gemessene Verteilung  $g(y)$  aus den Daten anzupassen.

Die exakte Detektorfunktion  $A(y, x)$  ist allerdings nicht mit einer endlichen Menge simulierter Ereignisse zu bestimmen, sondern das Faltungsintegral muß diskretisiert werden. Dazu schreibt man zunächst die (unbekannte) Funktion  $f(x)$  als eine Summe über  $m$  Basisfunktionen  $p_j(x)$ :

$$f(x) = \sum_{j=1}^m f_j f_{\text{MC}}(x) p_j(x), \quad (6.2)$$

die mit einem Koeffizientenvektor  $\mathbf{f} = \{f_j\}$  und der Verteilung der simulierten Ereignisse  $f_{\text{MC}}(x)$  gewichtet werden. Die Basisfunktionen  $p_j(x)$  sollen dabei positive Funktionen sein, die sich, unabhängig von ihrer genauen Definition, für ein gegebenes  $x$  stets zu Eins addieren sollen, wenn über alle  $j$  summiert wird. Die Gewichtung mit der Funktion  $f_{\text{MC}}(x)$  entspricht einer Entfaltung der Quotientenfunktion  $f(x)/f_{\text{MC}}(x)$ , die sich immer dann anbietet, wenn der erwartete Verlauf von  $f(x)$  durch schmale Resonanzen dominiert wird. Auf die prinzipiellen Unterschiede einer Behandlung der Quotientenfunktion im Gegensatz zu der eigentlichen Funktion wird im Laufe des Kapitels noch eingegangen.

Die einfachste Form der Diskretisierung besteht nun darin, für die Basisfunktionen  $p_j(x)$  Stufenfunktionen

$$p_j = \begin{cases} 1 & t_{j-1} \leq x < t_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (6.3)$$

mit äquidistanten Abständen  $d = t_j - t_{j-1}$  zu wählen. Die Funktion  $A(y, x)$  wird dann durch eine zweidimensionale Stufenfunktion,  $A_{ij}$ , ersetzt, die für alle  $y$  aus dem  $i$ -ten, rechtsseitig halboffenen Intervall  $[y_{i-1}, y_i)$  und alle  $x$  aus dem  $j$ -ten Intervall  $[x_{j-1}, x_j)$  einen konstanten Wert annimmt, der das mittlere Verhalten des Detektors für diese beiden Intervalle angibt, und aus der Simulation bestimmt werden kann, indem  $A_{ij}$  auf die Anzahl aller simulierten Ereignisse, deren  $x$ -Werte im  $j$ -ten  $x$ -Intervall und deren  $y$ -Werte im  $i$ -ten  $y$ -Intervall liegen, gesetzt wird.

Für  $g(y)$  und  $b(y)$  werden eindimensionale Stufenfunktionen auf denselben  $y$ -Intervallen eingeführt, so daß  $g_i$  die Summe aller Ereignisse angibt, deren gemessenes  $y$  im  $i$ -ten  $y$ -Intervall liegt.

Das Faltungsintegral vereinfacht sich dann zu einer Matrixgleichung, die sich, wenn man alle eindimensional diskretisierten Größen zu Vektoren und die zweidimensionale Größe zu einer Matrix zusammenfaßt, als

$$\mathbf{g} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{b}. \quad (6.4)$$

schreiben läßt, wobei  $\epsilon(x)$  bereits in die Komponenten von  $\mathbf{A}$  integriert worden ist. Die Lösung ist nun einfach durch die Inversion dieser Gleichung gegeben:

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{b}). \quad (6.5)$$

Die Diskretisierung führt aber zu einigen entscheidenden Nachteilen.

1. Die Anzahl der Intervalle in  $x$  und  $y$  muß identisch sein, wenn  $\mathbf{A}$  invertierbar sein soll;
2. Durch die Invertierung der Matrix können kleine Matrixelemente von  $\mathbf{A}$  dazu führen, daß die Komponenten von  $\mathbf{f}$  — stärker als der statistische Fehler vermuten läßt — um ihre Erwartungswerte streuen.

Den ersten Punkt kann man umgehen, indem keine echte Invertierung der Matrix durchgeführt wird, sondern unter Ausnutzung der Fehler der Komponenten von  $\mathbf{g}$  eine  $\chi^2$ -Anpassung des Vektors  $\mathbf{f}$  an die Daten vorgenommen wird. Die Anzahl der Intervalle in  $y$  darf dann nur nicht kleiner

werden als die Anzahl der Intervalle in  $x$ . Das zweite Problem bleibt aber auch dann noch bestehen, und die unphysikalisch großen Oszillationen des Lösungsvektors stellen das Hauptproblem der Entfaltung dar.

Um dieses Problem zu lösen, muß eine Regularisierungsfunktion eingeführt werden, die die unphysikalischen Komponenten von  $\mathbf{f}$  dämpft. Ein Maß, mit dem die Oszillationsstärke von  $\mathbf{f}$  gemessen werden kann, ist die totale Krümmung, die dem Integral des Quadrates der zweiten Ableitung von  $f(x)/f_{\text{MC}}(x)$  über  $x$  entspricht:

$$r(\mathbf{f}) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \left[ \frac{d^2}{dx^2} \frac{f(x)}{f_{\text{MC}}(x)} \right]^2, \quad (6.6)$$

und die regularisierte Lösung findet man durch die Minimierung des um diesen Krümmungsterm erweiterten  $\chi^2$ :

$$\chi_{\text{reg}}^2(\mathbf{f}) = \chi^2(\mathbf{f}) + \frac{1}{2} \rho r(\mathbf{f}). \quad (6.7)$$

Der Regularisierungsparameter  $\rho$  bestimmt die relative Stärke der Dämpfung. Wählt man  $\rho = 0$  findet überhaupt keine Dämpfung statt, und für  $\rho \rightarrow \infty$  erhält man eine flache Funktion, da nur noch die Reduzierung der Krümmung das  $\chi_{\text{reg}}^2$  verbessert. Um ein sinnvolles Resultat zu erhalten, muß also der Regularisierungsparameter so gewählt werden, daß nur statistisch insignifikante Komponenten, die zu großen Oszillationen führen, unterdrückt werden.

Werden für die  $p_j(x)$  Stufenfunktion gewählt, ist  $f(x)/f_{\text{MC}}(x)$  an den Intervallgrenzen nicht stetig, und die zweite Ableitung kann bestenfalls näherungsweise aus den Differenzenquotienten der Differenzenquotienten von  $f/f_{\text{MC}}$  bestimmt werden:

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{f(x)}{f_{\text{MC}}(x)} \approx \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{d^2}, \quad t_{j-1} \leq x < t_j. \quad (6.8)$$

Für die Randintervalle muß man hier noch geeignete Bedingungen finden, um auch dort die zweite Ableitung zu definieren. Das Integral (6.6) bleibt auch dann nur näherungsweise bestimmt, und damit ist das Dämpfungsmaß selbst nur ungenau bekannt. Wählt man dagegen für die Basisfunktionen  $p_j(x)$  sogenannte kubische B-Spline-Funktionen

$$p_j(x) = \frac{1}{6} \times \begin{cases} z^3 & z = (x - t_j)/d & t_j \leq x < t_{j+1} \\ (1 + 3(1 + z(1 - z))z) & z = (x - t_{j+1})/d & t_{j+1} \leq x < t_{j+2} \\ (1 + 3(1 + z(1 - z))(1 - z)) & z = (x - t_{j+2})/d & t_{j+2} \leq x < t_{j+3} \\ (1 - z)^3 & z = (x - t_{j+3})/d & t_{j+3} \leq x < t_{j+4} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (6.9)$$

wobei  $d = (x_{\max} - x_{\min})/(m - 3)$  der Abstand benachbarter Knoten  $t_k = x_{\min} + (k - 4)d$  für  $k = 1, \dots, m - 1$  Knoten und  $m$  Spline-Funktionen ist, bleiben die Funktion  $f(x)$  und ihre ersten beiden Ableitungen an den Knoten stetig, und das Integral (6.6) kann mit

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{f(x)}{f_{\text{MC}}(x)} = \sum_{j=1}^m f_j \frac{d^2}{dx^2} p_j(x) \quad (6.10)$$

exakt bestimmt werden. Der Koeffizientenvektor  $\mathbf{f}$  ist nun nicht mehr im  $x$ -Raum definiert, sondern im Raum der Spline-Funktionen. Dabei folgt aus der Definition (6.9), daß sich jede Spline-Funktion über vier  $x$ -Intervalle erstreckt. Nicht alle Intervalle sind aber physikalisch sinnvoll. So wird für die erste Spline-Funktion ( $j = 1$ ) nur das letzte Intervall benötigt, das sich von  $x_{\min}$  bis  $x_{\min} + d$  erstreckt, und für die letzte Spline-Funktion ( $j = m$ ) nur das erste Intervall, mit den

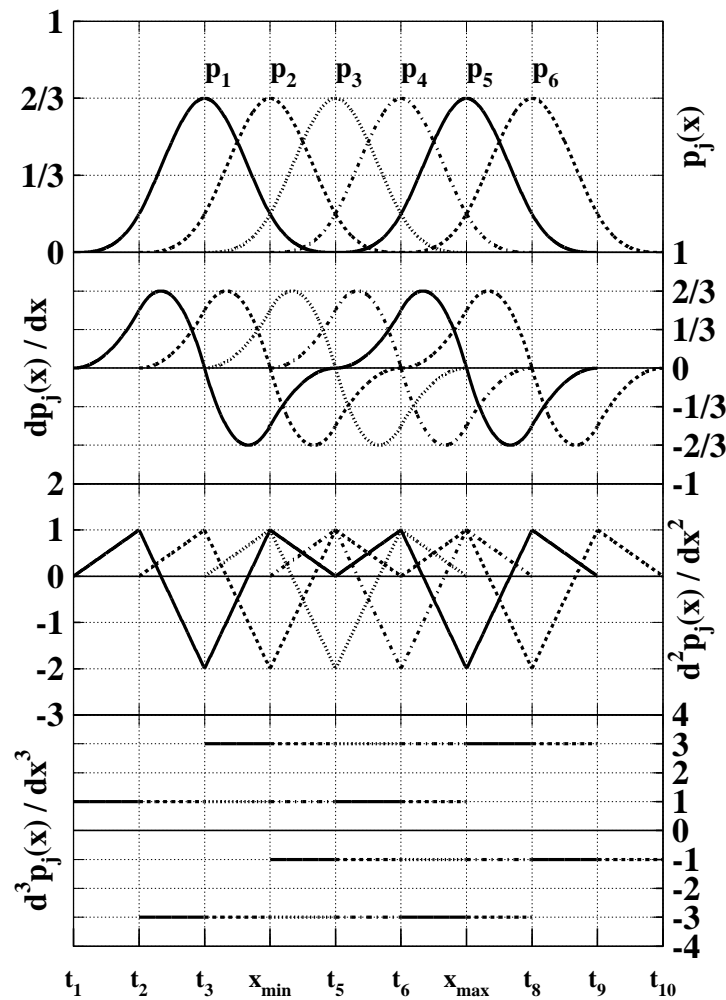


Abbildung 6.1: Kubische B-Spline-Funktionen und ihre ersten drei Ableitungen.

Grenzen  $x_{\max} - d$  und  $x_{\max}$ . Auch hier bleibt die Freiheit, mit zusätzlichen Randbedingungen den Koeffizienten der ersten und der letzten Spline-Funktion zu fixieren. Eine Randbedingung, die für die unbekannte Funktion  $f(x)$  kaum eine Einschränkung bedeutet, erhält man aus der Forderung, daß die dritte Ableitung der Summe der Spline-Funktionen an den Rändern stetig sein soll:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m f_j p_j'''(x_{\min}) &= \sum_{j=1}^m f_j p_j'''(x_{\min} + d) \\ \sum_{j=1}^m f_j p_j'''(x_{\max}) &= \sum_{j=1}^m f_j p_j'''(x_{\max} - d) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Werden mindestens sechs Spline-Funktionen in der Parametrisierung benutzt, kann man dann den ersten und den letzten Koeffizienten aus den anderen ausrechnen:

$$f_1 = 4f_2 - 6f_3 + 4f_4 - f_5 \quad \text{und}$$

$$f_m = 4f_{m-1} - 6f_{m-2} + 4f_{m-3} - f_{m-4}. \quad (6.12)$$

In der Anpassung an die Daten bleiben also  $m - 2$  Parameter zu bestimmen. In Abbildung 6.1 sind für sechs Spline-Funktionen die Funktionswerte und die Werte der ersten drei Ableitungen dargestellt. Die Abbildung zeigt, daß nur die Knoten  $t_4$  bis  $t_{m+1}$  innerhalb des physikalisch sinnvollen Bereichs liegen, und daß erst die dritte Ableitung an den Knoten unstetig ist.

Bevor die Regularisierung für eine Entfaltung mit kubischen B-Spline-Funktionen diskutiert wird, müssen die Schritte zur Diskretisierung des Faltungsintegrals (6.1), die bisher nur für eine Entfaltung mit Stufenfunktionen angegeben wurden, noch einmal betrachtet werden. Die Elemente

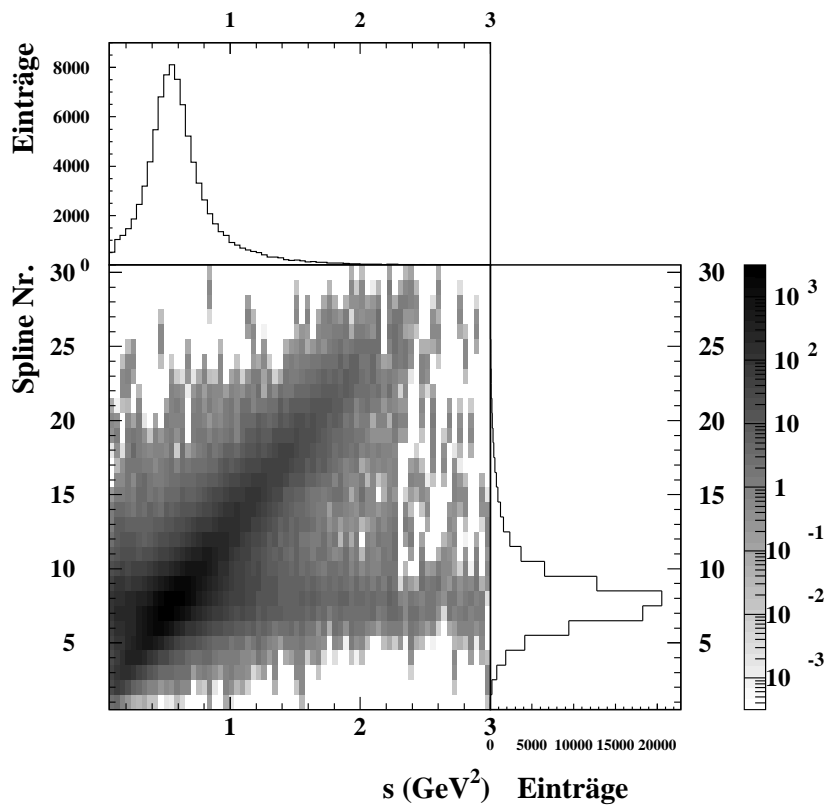


Abbildung 6.2: Detektormatrix für  $\tau \rightarrow \nu_\tau \pi \pi^0$ -Zerfälle. Auf einer logarithmischen Skala sind die Matrixelemente in dem zweidimensionalen Bild in Graustufen dargestellt. Auf der rechten Seite befindet sich die Projektion in den Raum der Spline-Funktionen, und oben ist die Projektion in den  $s_{\text{meas}}$ -Raum abgebildet. Letztere ergibt sich durch die Multiplikation der Matrix mit einem Koeffizientenvektor  $\mathbf{f}$ , dessen Elemente alle den Wert  $f_j = 1$  haben.

der Detektormatrix  $\mathbf{A}$  erhält man, indem für jedes simulierte Ereignis, das die Selektion passiert hat und durch das Wertepaar  $(x, y)$  beschrieben wird, jedes  $A_{ij}$  mit  $y_i \leq y < y_{i+1}$  auf  $A_{ij} + p_j(x)$  gesetzt wird. Im Unterschied zu der Verwendung von Stufenfunktionen trägt jetzt jedes Ereignis (sofern  $x$  nicht in einem der Randintervalle liegt) zu vier Matrixelementen mit unterschiedlichen Gewichten, die sich zu 1.0 addieren, bei. Da wieder nur die simulierten Ereignisse in die Detektormatrix eingehen, die die Selektion passiert haben, ist die Nachweiswahrscheinlichkeit bereits

in  $\mathbf{A}$  enthalten, und formal lautet die Definition:

$$A_{ij} = \int_{y_{i-1}}^{y_i} dy \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx A(y, x) \epsilon(x) f_{\text{MC}}(x) p_j(x). \quad (6.13)$$

Das Marixelement  $A_{ij}$  gibt nun das Produkt der Wahrscheinlichkeit, ein Ereignis im  $i$ -ten  $y$ -Intervall zu selektieren, wenn es tatsächlich gemäß der Funktion  $p_j(x)$  generiert wurde, mit der Anzahl der Ereignisse, die insgesamt gemäß der Funktion  $p_j(x)$  generiert worden sind, an. Die Summe der  $A_{ij}$  über alle  $j$  für ein bestimmtes  $i$  entspricht der insgesamt im  $i$ -ten  $y$ -Intervall selektierten Ereignisse, während die Summe der  $A_{ij}$  über alle  $i$  für ein bestimmtes  $j$  der Anzahl der Ereignisse entspricht, die gemäß  $p_j(x)$  generiert und außerdem auch selektiert wurden. Abbildung 6.2 zeigt diese Matrix und die Projektionen in den  $y \equiv s_{\text{meas}}$ -Raum bzw. den Raum der Spline-Funktionen am Beispiel simulierter  $\tau$ -Zerfälle im  $\pi\pi^0$ -Kanal. Die unregularisierte Lösung für den Koeffizientenvektor  $\mathbf{f}$  erhält man aus der Minimierung von

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\left( g_i - b_i - \sum_{j=1}^m A_{ij} f_j \right)^2}{\sigma_i^2}. \quad (6.14)$$

Die Größe  $\sigma_i$  gibt dabei den statistischen Fehler der gemessenen Daten an. Integriert man dann Gleichung 6.2 über beliebige Intervalle in  $x$ , erhält man eine diskretisierte Verteilung von  $f$  im  $x$ -Raum:

$$f'_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx \sum_{j=1}^m f_j f_{\text{MC}}(x) p_j(x). \quad (6.15)$$

Je nach Anzahl der benutzten Spline-Funktionen und der schließlich gewählten Intervalle in  $x$  sind die integrierten Entfaltungsergebnisse  $f'_k$  unterschiedlich stark korreliert.

Ohne einen zusätzlichen Regularisierungsterm ergeben sich bei der Entfaltung eines gemessenen Spektrums nach wie vor große Oszillationen und teilweise sogar negative Werte für das entfaltete Spektrum. In Abbildung 6.3(a) ist für einen simulierten Testdatensatz, der 20000 selektierten Zerfällen mit einem Untergrundanteil von 18 % entspricht, das Resultat einer Entfaltung ohne Regularisierung dargestellt. Die Detektormatrix ist hier mit einer anderen Simulation, die zwar dasselbe Antwortverhalten des Detektors aber eine andere Generator-Funktion beinhaltet, erstellt worden. Die entfalteten Werte streuen sehr stark um die erwartete Verteilung, und ihre Fehler übersteigen deutlich die statistischen Unsicherheiten.

Betrachtet man die Hesse-Matrix

$$H_{jk} = \frac{1}{2} \frac{d^2 \chi^2}{df_j df_k} = (\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{f}))_{ij}, \quad (6.16)$$

die der Inversen der Fehlermatrix des Lösungsvektors  $\mathbf{f}$  entspricht, läßt sich die Ursache der Oszillationen auf die statistisch insignifikanten Komponenten zurückführen, indem man  $\mathbf{f}$  in einen Raum transformiert, in dem alle Komponenten unabhängig sind und den Fehler  $\pm 1$  haben. Dazu wird zunächst  $\mathbf{H}$  diagonalisiert:

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}_1^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{U}_1, \quad (6.17)$$

so daß nur die Diagonalelemente von  $\mathbf{D}$ ,  $D_{jj}$ , von Null verschieden sind und den Eigenwerten von  $\mathbf{H}$  entsprechen. Die Matrix  $\mathbf{U}_1$  ist orthogonal und kann so gewählt werden, daß die Diagonalelemente von  $\mathbf{D}$  in absteigender Reihenfolge,  $D_{11} \geq D_{22} \geq \dots \geq D_{mm}$  sortiert sind. Die Transformation

$$\mathbf{a} = \mathbf{D}^{1/2} \cdot \mathbf{U}_1^T \cdot \mathbf{f} \quad (6.18)$$

führt dann zu dem gewünschten Ergebnis, daß alle  $a_j$  den Fehler  $\pm 1$  haben und keinerlei Korrelationen zwischen ihnen auftreten. Die Elemente der Matrix  $\mathbf{D}^{1/2}$  sind gerade die Quadratwurzeln der Elemente von  $\mathbf{D}$ , und es gilt  $\mathbf{D}^{1/2} \cdot \mathbf{D}^{1/2} = \mathbf{D}$ . Umgekehrt ergibt sich also der Lösungsvektor

$$\mathbf{f} = \sum_{j=1}^m \frac{a_j}{\sqrt{D_{jj}}} (\mathbf{u}_1)_j, \quad (6.19)$$

aus den Spaltenvektoren  $\mathbf{u}_{1j}$  von  $\mathbf{U}_1$ , die alle die Länge 1 haben, den unabhängigen Koeffizienten  $a_j$  und den Eigenwerten der Hesse-Matrix  $D_{jj}$ . Kleine Eigenwerte entsprechen dabei großen Fehlern und gerade diese statistisch insignifikanten Beiträge erhalten ein großes Gewicht. Werden alle Koeffizienten mit  $j > m_0$ , wenn  $m_0$  der Index des ersten Koeffizienten  $a_{m_0}$ , der mit Null verträglich ist, weggelassen, verbleiben nur noch die statistisch signifikanten Komponenten in  $\mathbf{f}$ . Mit einer glatten Dämpfungsfunktion läßt sich dieses Resultat noch weiter optimieren, da auch ein sprunghafter Abbruch bei  $j = m_0$  Oszillationen der Komponenten von  $\mathbf{f}$  verursacht. Die Minimierung von (6.7), wobei  $\rho$  so gewählt wird, daß der Dämpfungsterm erst für  $j > m_0$  entscheidend wird, führt gerade zu einer allmählichen Abschwächung der Koeffizienten, ohne neue Oszillationen hervorzurufen.

Den richtigen Regularisierungsparameter  $\rho$  erhält man aus einer Kombination der Krümmung und der Fehlermatrix des ohne Regularisierung gefundenen Lösungsvektors  $\mathbf{f}$ . Um die Krümmung bei einer Diskretisierung der gesuchten Funktion  $f(x)$  durch kubische B-Spline-Funktionen auszurechnen, werden zunächst die zweiten Ableitungen der Spline-Funktionen benötigt:

$$p_j''(x) = \frac{1}{d^2} \times \begin{cases} z & z = (x - t_j)/d & t_j \leq x < t_{j+1} \\ 1 - 3z & z = (x - t_{j+1})/d & t_{j+1} \leq x < t_{j+2} \\ 3z - 2 & z = (x - t_{j+2})/d & t_{j+2} \leq x < t_{j+3} \\ (1 - z) & z = (x - t_{j+3})/d & t_{j+3} \leq x < t_{j+4} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.20)$$

Die Krümmung ergibt sich dann aus Integralen über Produkte der zweiten Ableitungen

$$M_{ij}^k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} dx p_i''(x) p_j''(x) = \frac{1}{6d^3} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} j \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \end{matrix}, \quad (6.21)$$

so daß  $r(\mathbf{f})$  als eine quadratische Form in  $\mathbf{f}$  geschrieben werden kann:

$$r(\mathbf{f}) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \left[ \sum_{j=1}^m f_j \frac{d^2}{dx^2} p_j(x) \right]^2 = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{f}, \quad (6.22)$$

wobei die Matrix  $\mathbf{C}$  positiv semidefinit, symmetrisch und konstant ist und aus den  $M_{ij}^k$  gebildet werden kann:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{6d^3} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -3 & 8 & -6 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & -6 & 14 & -9 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & -9 & 16 & -9 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 16 & -9 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 & 16 & \\ \vdots & & & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (6.23)$$

Im Raum des transformierten Koeffizientenvektors  $\mathbf{a}$ , der zu der unregulierten Lösung  $\mathbf{f}$  gehört, lautet der Regularisierungsterm

$$\frac{1}{2} \rho r(\mathbf{f}) = \frac{1}{2} \rho \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{a} \quad (6.24)$$

mit

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{D}^{-1/2} \cdot \mathbf{U}_1^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{D}^{-1/2}. \quad (6.25)$$

Wird jetzt  $\mathbf{C}_1$  mit einer weiteren orthogonalen Transformation  $\mathbf{U}_2$  zu

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}_2^T \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{U}_2 \quad (6.26)$$

diagonalisiert, so daß die Diagonalelemente von  $\mathbf{S}$ , die den Eigenwerten von  $\mathbf{C}_1$  entsprechen, in aufsteigender Reihenfolge sortiert sind, kann man zeigen, daß aus der unregulierten Lösung, die nach der Drehung

$$\mathbf{a}' = \mathbf{U}_2^T \cdot \mathbf{a} \quad (6.27)$$

immer noch durch unabhängige Koeffizienten  $a'_j$  mit der Streuung  $\pm 1$  gegeben ist, die Komponenten des regulierten Lösungsvektors, für den (6.7) bei einem gegebenen  $\rho$  minimal ist, mit

$$\tilde{a}_j = \frac{1}{1 + \rho S_{jj}} a'_j \quad (6.28)$$

berechnet werden können. Da die  $S_{jj}$  in aufsteigender Reihenfolge sortiert sind, und typischerweise mit aufsteigendem Index exponentiell anwachsen, ist der Effekt des Dämpfungsparameters, der für  $m_0$  signifikante Komponenten von  $\mathbf{a}'$  mit  $\rho \approx 1/S_{m_0 m_0}$  abgeschätzt werden kann, auf die ersten Elemente mit  $j < m_0$  sehr klein, während für alle Elemente  $j > m_0$  eine starke Dämpfung einsetzt. Umgekehrt kann man die Summe

$$m_0 = \sum_{j=1}^m \frac{1}{1 + \rho S_{jj}} \quad (6.29)$$

als effektive Anzahl ungedämpfter Spline-Funktionen interpretieren. Den richtigen Dämpfungsparameter findet man nun, indem  $m_0$  aus dem Verhalten der Koeffizienten  $a'_j$  bestimmt wird. Da alle Koeffizienten unabhängig sind und ihre Fehlermatrix durch die Einheitsmatrix gegeben ist, bezeichnet der Index  $j$ , ab dem alle weiteren Koeffizienten mit Null verträglich sind, den Grenzindex  $m_0$ , ab dem die Dämpfung einzusetzen hat. In Abbildung 6.3(d) sind für den Test der Methode mit simulierten Daten die Koeffizienten  $a'_j$  gegen die Indexnummer aufgetragen. Für die Indizes  $j > m_0 = 10$  sind alle Koeffizienten im Rahmen ihrer Fehler, die durch die beiden Linien bei  $\pm 1$  angedeutet sind, mit Null verträglich. Aus (6.29) wird das zu diesem  $m_0$  passende  $\rho$  bestimmt, und die regulierte Lösung  $\tilde{\mathbf{f}}$  ergibt sich nach den Rücktransformationen mit den Matrizen  $\mathbf{U}_2$ ,  $\mathbf{D}^{-1/2}$  und  $\mathbf{U}_1$  aus Gleichung (6.28). Die Fehlermatrix  $\mathbf{V}(\tilde{a}_j)$  der regulierten Koeffizienten  $\tilde{a}_j$  ist durch

$$\mathbf{V}(\tilde{a}_j) = (\mathbf{1} + \rho \mathbf{S})^{-2} \quad (6.30)$$

gegeben, wobei  $\mathbf{1}$  die Einheitsmatrix ist, und kann mit denselben Matrizen in  $\mathbf{V}(\tilde{\mathbf{f}})$  rücktransformiert werden.

Der Effekt der Regularisierung ist in Abbildung 6.3 dargestellt. Bild (a) entspricht der nicht-regulierten Lösung ( $\rho = 0$ ), die starke Oszillationen aufweist. Bild (b) zeigt das Ergebnis einer zu starken Dämpfung, in der von den 30 Spline-Funktionen effektiv nur  $m_0 = 4$  ungedämpft geblieben sind. In Bild (c) ist schließlich mit dem zu  $m_0 = 10$  gehörenden  $\rho$  reguliert worden und die Übereinstimmung mit der erwarteten Verteilung ist sehr gut. Bild (e) zeigt die



in der Anpassung verwendeten Verteilungen im Detektorraum und das in den Detektorraum zurückgefaltete Resultat der regularisierten Entfaltung.

In dem hier gezeigten Beispiel weicht die Funktion  $f(x)$  deutlich von der Vorhersagefunktion  $f_{MC}(x)$  ab. Dennoch sind keine systematischen Verschiebungen des Entfaltungsergebnisats

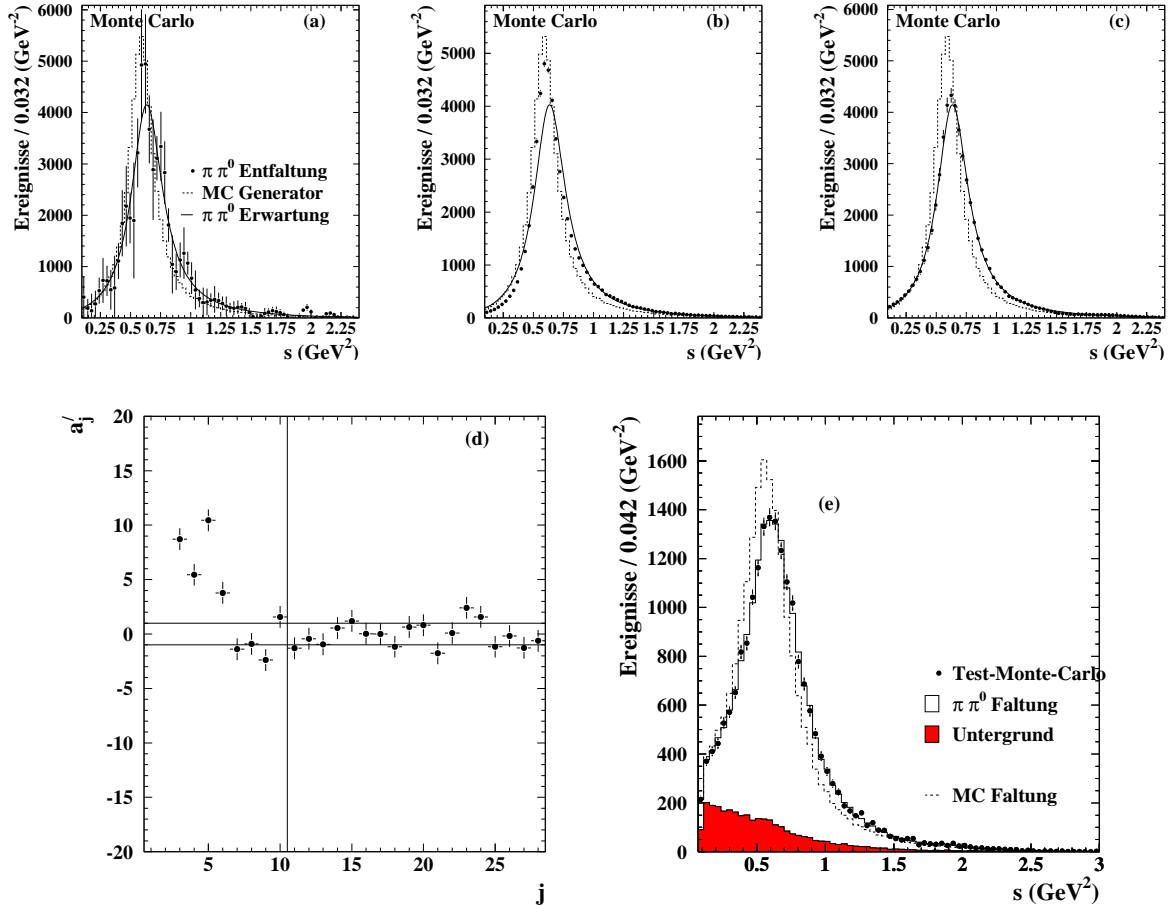


Abbildung 6.3: Test der Entfaltungsmethode. Die drei oberen Bilder zeigen drei Entfaltungen desselben Datensatzes. Die Punkte mit Fehlerbalken entsprechen dem Resultat der Entfaltung; die gestrichelte Linie zeigt die Verteilung der zum Erzeugen der Detektormatrix benutzten Ereignisse; die durchgezogene Linie gibt die Funktion wieder, nach der die simulierten Daten ursprünglich verteilt waren. In (a) ist überhaupt nicht, in (b) zu stark und in (c) richtig regularisiert worden. der Koeffizientenvektor  $a'_j$  (siehe Text) ist in (d) dargestellt; die senkrechte Linie zeigt, ab wo die Koeffizienten für (c) gedämpft wurden. Die ersten beiden Koeffizienten sind größer als 20 und im Bild nicht zu sehen. In (e) sind die simulierten Daten (Punkte), die Vorhersage im Detektorraum (gestrichelte Linie), der erwartete Untergrund (dunkle Fläche) und das in den Datenraum zurückgefaltete Resultat der Entfaltung angegeben (durchgezogene Linie).

in Richtung der Vorhersage festzustellen, wenn der Regularisierungsparameter richtig gewählt wird. Sind sich die vorhergesagte Funktion  $f_{MC}(x)$  und die zu entfaltende Funktion  $f(x)$  ähnlich, kommt die Anpassung mit weniger Koeffizienten aus und das Resultat wird stabiler. Aus diesem Grund wird statt der Funktion  $f(x)$  die Quotientenfunktion  $f(x)/f_{MC}(x)$  entfaltet. Für den dämpfungsfreien Fall sind beide Methoden gleichwertig, führen aber im gedämpften Fall zu un-

terschiedlichen Resultaten. Betrachtet man nur den Einfluß des Regularisierungsterms im  $\chi^2_{\text{reg}}$ , erhält man für  $f(x)$  bei der Entfaltung von  $f(x)$  eine konstante Funktion und bei der Entfaltung von  $f(x)/f_{\text{MC}}(x)$  die Vorhersagefunktion  $f_{\text{MC}}(x)$ . Ist eine generelle Struktur der Funktion  $f(x)$  also bereits bekannt, und werden nur geringe Abweichungen von dieser Struktur erwartet, ist es günstiger, die Quotientenfunktion anstelle der Funktion selbst zu entfalten.

### 6.3 Korrelationen

Der Untergrund in den hier analysierten  $\tau$ -Zerfällen besteht überwiegend aus fehlidentifizierten anderen  $\tau$ -Zerfällen, die ein neutrales Pion im Endzustand mehr oder weniger als der betrachtete Kanal aufweisen, und in der Rekonstruktion fälschlich zu der Anzahl neutraler Pionen, die für den betrachteten Kanal verlangt werden, geführt haben. Setzt man für jeden Signalkanal diesen Untergrund als bekannt voraus, ignoriert man die Korrelation dieses Untergrundes mit den entfalteten Verteilungen der benachbarten Signalkanäle. Das kann sowohl die Form als auch die Fehler des entfalteten Resultats verfälschen. Möchte man die Korrelationen explizit berücksichtigen, müssen alle einspurigen (dreispurigen) Zerfallskanäle gemeinsam entfaltet werden. Die Anzahl der fehlidentifizierten Ereignisse, die aus einem einspurigen (dreispurigen) Kanal stammen und in einem dreispurigen (einspurigen) Kanal nachgewiesen werden ist dagegen gering.

Neben den drei bereits eingeführten Detektormatrizen für einspurige (dreispurige) Zerfälle, die die Verteilungen der Meßgrößen  $y$  aus dem Antwortverhalten des Detektors auf die Verteilungen in den Größen  $x$  der Signalkanäle angeben, werden sechs weitere Matrizen benötigt, die in jedem Signalkanal das Antwortverhalten des Detektors auf die  $x$ -Verteilungen der benachbarten Kanäle beschreiben.

Für die einspurigen Zerfälle sind die benötigten Matrizen in Abbildung 6.4 dargestellt, und die Matrizen für die Entfaltung dreispuriger Zerfälle zeigt Abbildung 6.5. Die Anpassung der Koeffizientenvektoren an die Daten geschieht wie in Abschnitt 6.2 beschrieben durch die Minimierung eines  $\chi^2$  (siehe Gleichung (6.14)), das jetzt um die Korrelationsterme zu erweitern ist:

$$\chi^2 = (\mathbf{g} - \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{f})^T \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{f}). \quad (6.31)$$

Für einspurige Zerfälle wird der Vektor  $\mathbf{g} = \{\mathbf{g}^{\pi\pi^0}, \mathbf{g}^{\pi 2\pi^0}, \mathbf{g}^{\pi 3\pi^0}\}$  aus den  $n_{\pi\pi^0} + n_{\pi 2\pi^0} + n_{\pi 3\pi^0}$  Komponenten der Vektoren der einzelnen Kanäle zusammengesetzt und entsprechend lautet der  $n_{3\pi} + n_{3\pi\pi^0} + n_{3\pi 2\pi^0}$ -Komponenten Vektor im dreispurigen Fall  $\mathbf{g} = \{\mathbf{g}^{3\pi}, \mathbf{g}^{3\pi\pi^0}, \mathbf{g}^{3\pi 2\pi^0}\}$ . Analog ergeben sich die unkorrelierten Untergrundvektoren  $\mathbf{b}$  aus den nicht gemeinsam zu entfaltenden simulierten Untergrundereignissen in den je drei Signalkanälen. Die Matrizen  $\mathbf{A}$  setzen sich aus  $3 \times 3$  Untermatrizen zusammen (siehe Abbildungen 6.4 und 6.5). Ihre Normierung wird so gewählt, daß für  $f_j^l = N^l/N_{\text{MC}}^l$ , wenn  $N^l$  die Anzahl der im Kanal  $l$  selektierten Ereignisse aus den Daten und  $N_{\text{MC}}^l$  die Anzahl der selektierten Ereignisse aus der Simulation bezeichnet, die Multiplikation mit den Untermatrizen jeweils die erwartete Anzahl Ereignisse aus dem Signal- oder einem Untergrundkanal in den Signalkanälen ergibt. Die erwarteten Anzahlen sind dabei auf die aktuellen Weltmittelwerte [1] der Verzweungsverhältnisse des  $\tau$ -Leptons korrigierte Werte. Der Koeffizientenvektor  $\mathbf{f}$  schließlich ergibt sich aus den  $m_{\pi\pi^0} + m_{\pi 2\pi^0} + m_{\pi 3\pi^0}$  Koeffizienten der gemeinsam betrachteten einspurigen Zerfälle bzw. den  $m_{3\pi} + m_{3\pi\pi^0} + m_{3\pi 2\pi^0}$  Koeffizienten für dreispurige Zerfälle.

Die Fehlermatrix  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{Dat}} + \mathbf{V}_{\text{MC}} + \mathbf{V}_B$  besteht aus der Summe einer Diagonalmatrix  $\mathbf{V}_{\text{Dat}}$ , deren Elemente

$$V_{\text{Dat},ii} = g_i, \quad i = 1, \dots, n_{\pi\pi^0}, n_{\pi\pi^0} + 1, \dots, n_{\pi\pi^0} + n_{\pi 2\pi^0} + n_{\pi 3\pi^0}, \quad (6.32)$$

$\begin{matrix} (3\pi) & (3\pi) & (3\pi) & (3\pi\pi^0) & (3\pi 2\pi^0) \end{matrix}$

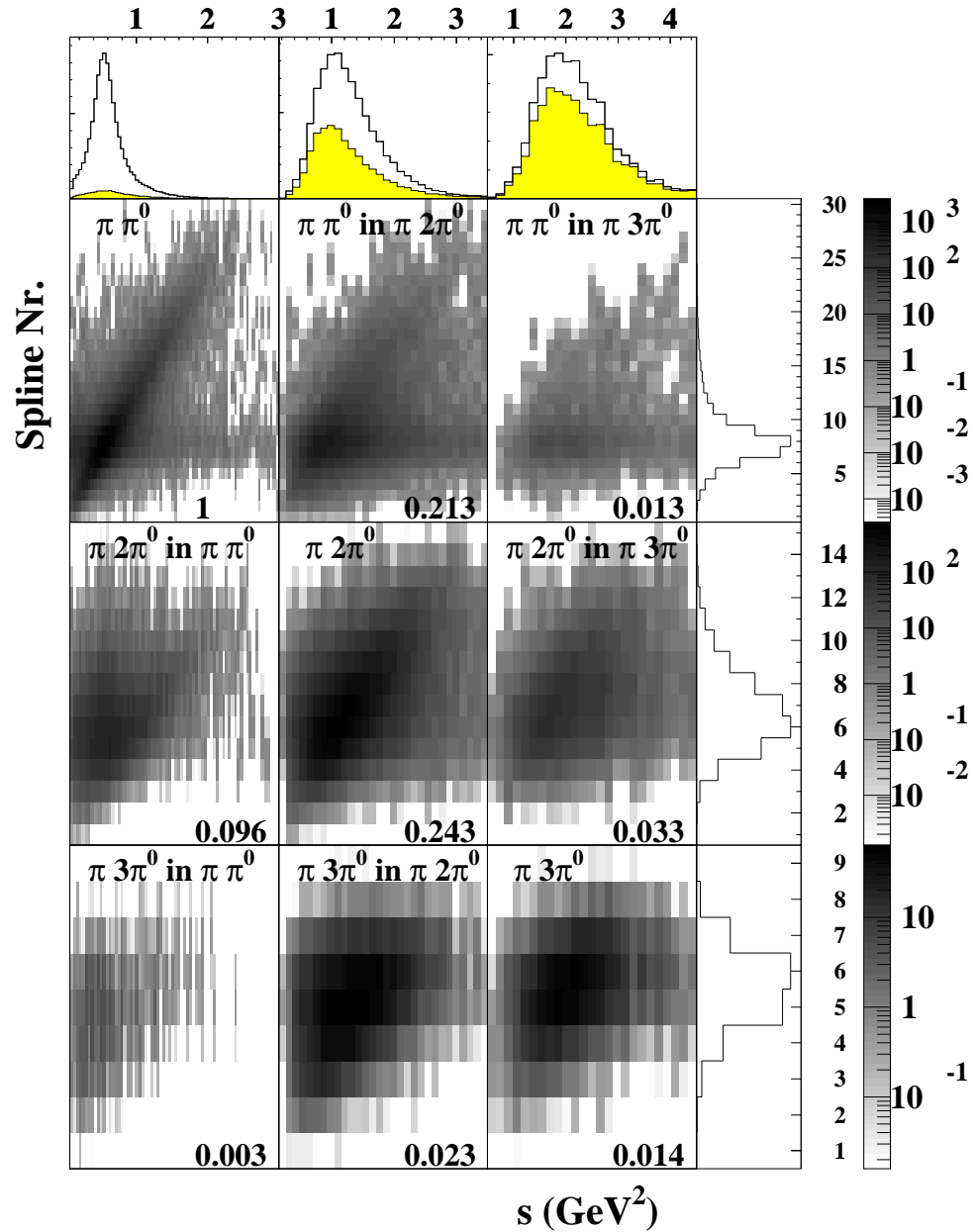


Abbildung 6.4: Detektormatrizen für die einspurigen Zerfälle. Die Matrizen entlang der Diagonalen zeigen das Detektorverhalten für die richtig identifizierten Signalkanäle. Außerdiagonalmatrizen sind in jeder Reihe für die Abbildung des selben Signalkanals, zu dem die Matrix auf der Diagonalen gehört, in die Nachbarkanäle dargestellt. Die Projektionen am oberen Rand zeigen die erwarteten Spektren, wobei die transparente Fläche den Signalanteil und die gefärbte Fläche den Untergrund der benachbarten Kanäle angibt. Die Projektionen am rechten Rand stellen die Signalverteilungen im Raum der Spline-Funktionen dar. Der relative Beitrag der Untermatrizen (normiert auf den Beitrag der  $\pi\pi^0$ -Matrix) ist jeweils unten rechts in den Matrizen angegeben.

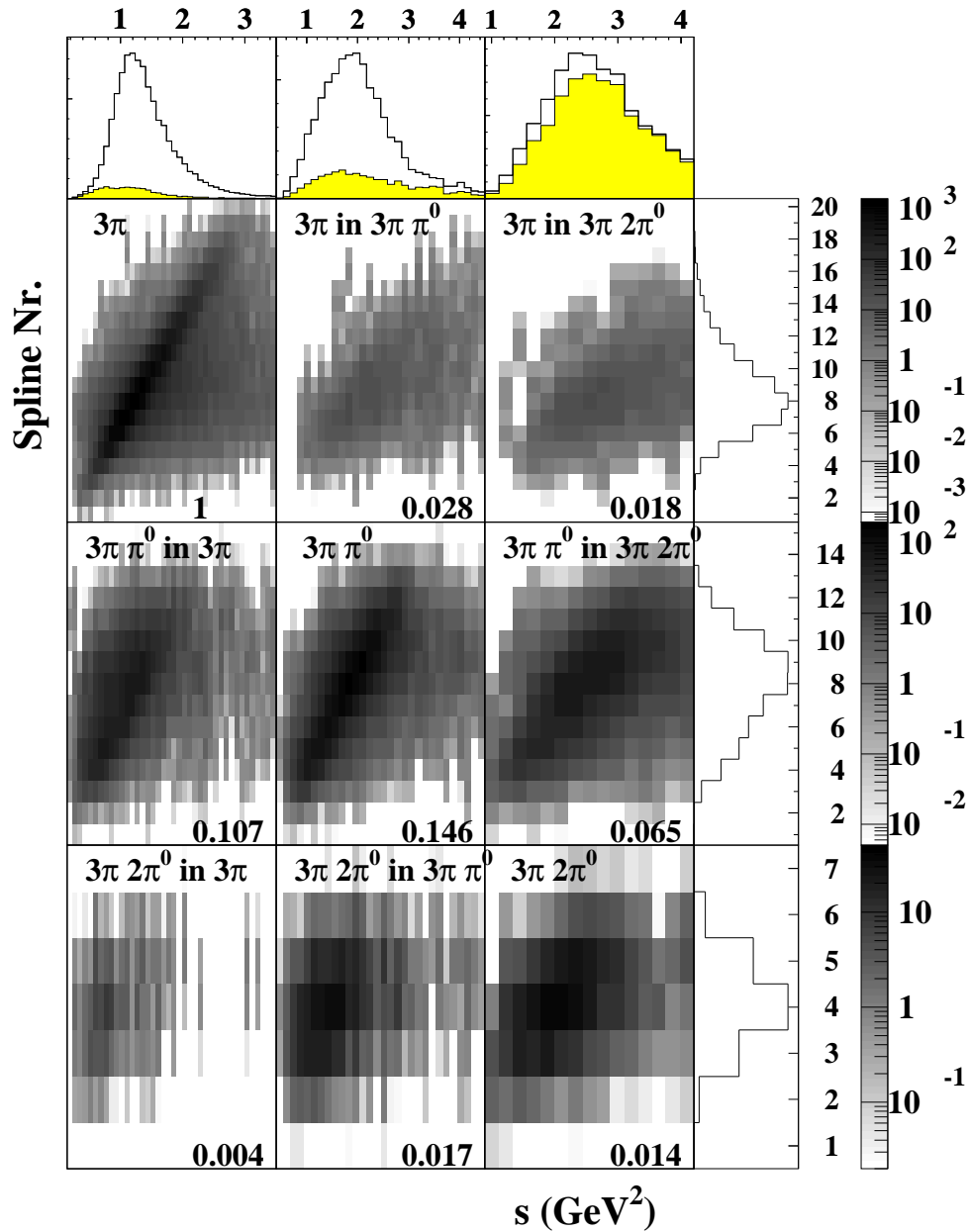


Abbildung 6.5: Detektormatrizen für die dreispurigen Zerfälle. Die Matrizen entlang der Diagonalen zeigen das Detektorverhalten für die richtig identifizierte Signalkanäle. Außerdiagonalmatrizen sind in jeder Reihe für die Abbildung des selben Signalkanals, zu dem die Matrix auf der Diagonalen gehört, in die Nachbarkanäle dargestellt. Die Projektionen am oberen Rand zeigen die erwarteten Spektren, wobei die transparente Fläche den Signalanteil und die gefärbte Fläche den Untergrund der benachbarten Kanäle angibt. Die Projektionen am rechten Rand stellen die Signalverteilungen im Raum der Spline-Funktionen dar. Der relative Beitrag der Untermatrizen (normiert auf den Beitrag der  $3\pi$ -Matrix) ist jeweils unten rechts in den Matrizen angegeben.

der Streuung der gemessenen Daten in jedem Intervall entsprechen, einer Diagonalmatrix  $\mathbf{V}_{\text{MC}}$ , deren Elemente

$$V_{\text{MC},ii} = \left( \frac{N^k}{N_{\text{MC}}^k} \right)^2 \left[ \sum_{b \in \left\{ \begin{array}{c} \text{unkorrelierter} \\ \text{Untergrund} \end{array} \right\}_k} \left( \frac{B^b}{B_{\text{MC}}^b} \right)^2 N_i^{kb} + \sum_{l = \substack{\pi\pi^0, \pi 2\pi^0, \pi 3\pi^0 \\ (3\pi, 3\pi\pi^0, 3\pi 2\pi^0)}} \left( \frac{B^l}{B_{\text{MC}}^l} \right)^2 N_i^{kl} \right], \quad (6.33)$$

$$i \text{ wie oben, } k = \begin{cases} \begin{array}{c} \pi\pi^0 \\ (3\pi) \end{array}, & 0 < i \leq n_{\pi\pi^0} \\ \begin{array}{c} \pi 2\pi^0 \\ (3\pi\pi^0) \end{array}, & n_{\pi\pi^0} < i \leq n_{\pi\pi^0} + n_{\pi 2\pi^0} \\ \begin{array}{c} \pi 3\pi^0 \\ (3\pi 2\pi^0) \end{array}, & n_{\pi\pi^0} + n_{\pi 2\pi^0} < i \leq n_{\pi\pi^0} + n_{\pi 2\pi^0} + n_{\pi 3\pi^0} \end{cases},$$

mit der Anzahl simulierter, unkorrelierter Untergrundereignisse  $N_i^{kb}$  eines Kanals  $b$ , die im Intervall  $i$  des Kanals  $k$  selektiert werden, und der Anzahl simulierter, korrelierter Untergrund- oder Signalereignisse  $N_i^{kl}$  eines Kanals  $l$ , die im Intervall  $i$  des Kanals  $k$  selektiert werden, die Streuung der simulierten Ereignisse (gewichtet mit der Korrektur auf die Verzweungsverhältnisse und der Normierung) berücksichtigen sowie einer nicht diagonalen Matrix  $\mathbf{V}_B$ , deren Elemente

$$V_{B,ii'} = \sum_{r,s=1,n_B} \frac{\partial \{\mathbf{b} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{f}\}_i}{\partial B^r} V_{\text{PDG},rs} \frac{\partial \{\mathbf{b} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{f}\}_{i'}}{\partial B^s}, \quad i, i' = 1, \dots, n_{\pi\pi^0} + n_{\pi 2\pi^0} + n_{\pi 3\pi^0}, \quad (6.34)$$

aus den Korrelationen und Fehlern  $\mathbf{V}_{\text{PDG}}$  der  $n_B$  Verzweungsverhältnisse  $B^r$ , die [1] entnommen sind, hervorgehen. Der Fehler auf den unkorrelierten Untergrund aus Ereignissen, die nicht der  $\tau$ -Paar Simulation entnommen sind, wird wie in (6.33) behandelt, wobei sich die Normierung hier aus den unterschiedlichen Luminositäten der simulierten Datensätze ergibt.

Wie im Fall einer unkorrelierten Entfaltung ergibt sich das regularisierte Resultat im  $x$ -Raum nach der Anpassung der  $\mathbf{f}$  an die Daten und anschließende Regularisierung ( $\hat{\mathbf{f}}$ ) durch die stückweise Integration in (6.15), wobei hier die unregularisierten  $f_j$  durch die regularisierten  $\tilde{f}_j$  zu ersetzen sind. Die Gewichtung mit dem vorhergesagten Verlauf  $f_{\text{MC}}$  berücksichtigt nun auch simulierte Ereignisse, die nicht selektiert worden sind und der statistische Fehler dieses noch nicht in  $\mathbf{V}$  berücksichtigten Anteils wird quadratisch zu dem bereits berechneten Fehler addiert.



## 7. Resultate

In diesem Kapitel werden zunächst die gemessenen Spektren der Massenquadrate und deren Entfaltung präsentiert. Einige modellabhängige Tests der  $\rho$ - und der  $a_1$ -Resonanz in den entfalteten Spektren werden vorgestellt, um die entfalteten Daten mit der Simulation zu vergleichen. Der Schwerpunkt dieses Kapitels liegt auf der Bestimmung der Spektralfunktionen aus den entfalten Spektren und deren Anwendung in Form der Momente von  $R_\tau$ , mit denen dann schließlich  $\alpha_s(m_\tau^2)$  und Parameter der nicht-perturbativen QCD gemessen werden, sowie in Form von QCD-Summenregeln. Die Messung der starken Kopplungskonstanten ist in korrelierter Form sogar unterhalb der  $\tau$ -Masse möglich und wird ebenfalls in diesem Kapitel vorgestellt.

### 7.1 Gemessene Spektren

Die gemessenen Spektren der Massenquadrate für die drei einspurigen und die drei dreispurigen Kanäle sind in den Abbildungen 7.1 und 7.2 dargestellt. Die Daten sind dabei im Vergleich mit der Vorhersage aus der Simulation und dem wieder in den Daten-Raum zurückgefalteten Ergebnis der Entfaltung zu sehen. Der erwartete unkorrelierte Untergrund (dunkle Fläche) sowie die aus der korrelierten Entfaltung resultierenden Anteile der benachbarten Kanäle (helle Fläche) sind ebenfalls eingezeichnet. Nachweiswahrscheinlichkeit und Untergrundanteile aus diesen beiden Quellen sind bereits in Tabelle 5.2 angegeben worden.

Die Spektren für die Kanäle  $\pi\pi^0$  und  $3\pi$  sind hier mit der höchsten Nachweiswahrscheinlichkeit bei sehr niedrigem Untergrund und vergleichsweise kleinen statistischen Fehlern besonders hervorzuheben, da Abweichungen von der Vorhersage hier besonders genau gemessen werden können.

Tatsächlich ist im  $3\pi$ -Spektrum im Bereich des Resonanzmaximums sowie an dessen rechter Flanke eine signifikant andere Form in den Daten zu beobachten als die Simulation vorhersagt. Geht man davon aus, daß das  $\pi 2\pi^0$ -Spektrum und der  $3\pi$ -Kanal beide dominant durch die  $a_1$ -Resonanz beschrieben werden, ist im  $\pi 2\pi^0$ -Kanal eine Abweichung in derselben Größenordnung zu erwarten. Das Defizit in der Resonanzregion ist hier tatsächlich ebenfalls vorhanden, weicht aber aufgrund der größeren statistischen Fehler nicht so signifikant von der Vorhersage ab. Die Erhöhung der rechten Flanke kann man aus Abbildung 7.1 (c) allerdings nicht erkennen. In der Diskussion der entfalten Spektren (Abschnitt 7.1.1) zeigt sich aber, daß das Defizit im Resonanzmaximum auch im  $\pi 2\pi^0$ -Fall zu einer leichten Überhöhung der rechten Flanke führt. Da aber die Auflösung für Zerfälle mit geladenen anstelle neutraler Pionen besser ist, ergibt sich im  $3\pi$ -Kanal ein deutlicherer Effekt.

Im  $\pi\pi^0$ -Spektrum sind ebenfalls im Bereich des Resonanzmaximums und, wie die logarithmische Darstellung in Abbildung 7.1 (b) zeigt, der rechten Flanke der Resonanz von der erwarteten Form abweichende Verteilungen zu beobachten, deren mögliche Ursachen im Abschnitt 7.1.1 erörtert werden.

Im  $3\pi\pi^0$ -Spektrum erkennt man sowohl in den Daten als auch in der Simulation eine zweiteilige Struktur. Im Bereich des Maximums ist die Verteilung dominant durch den Phasenraum für vier Pionen zu beschreiben, während die linke Flanke durch die Zerfälle  $\tau \rightarrow \nu_\tau \pi \omega \rightarrow 3\pi\pi^0$ , in denen drei Pionen aus dem Zerfall der  $\omega$ -Resonanz stammen, gegenüber einer reinen Phasen-

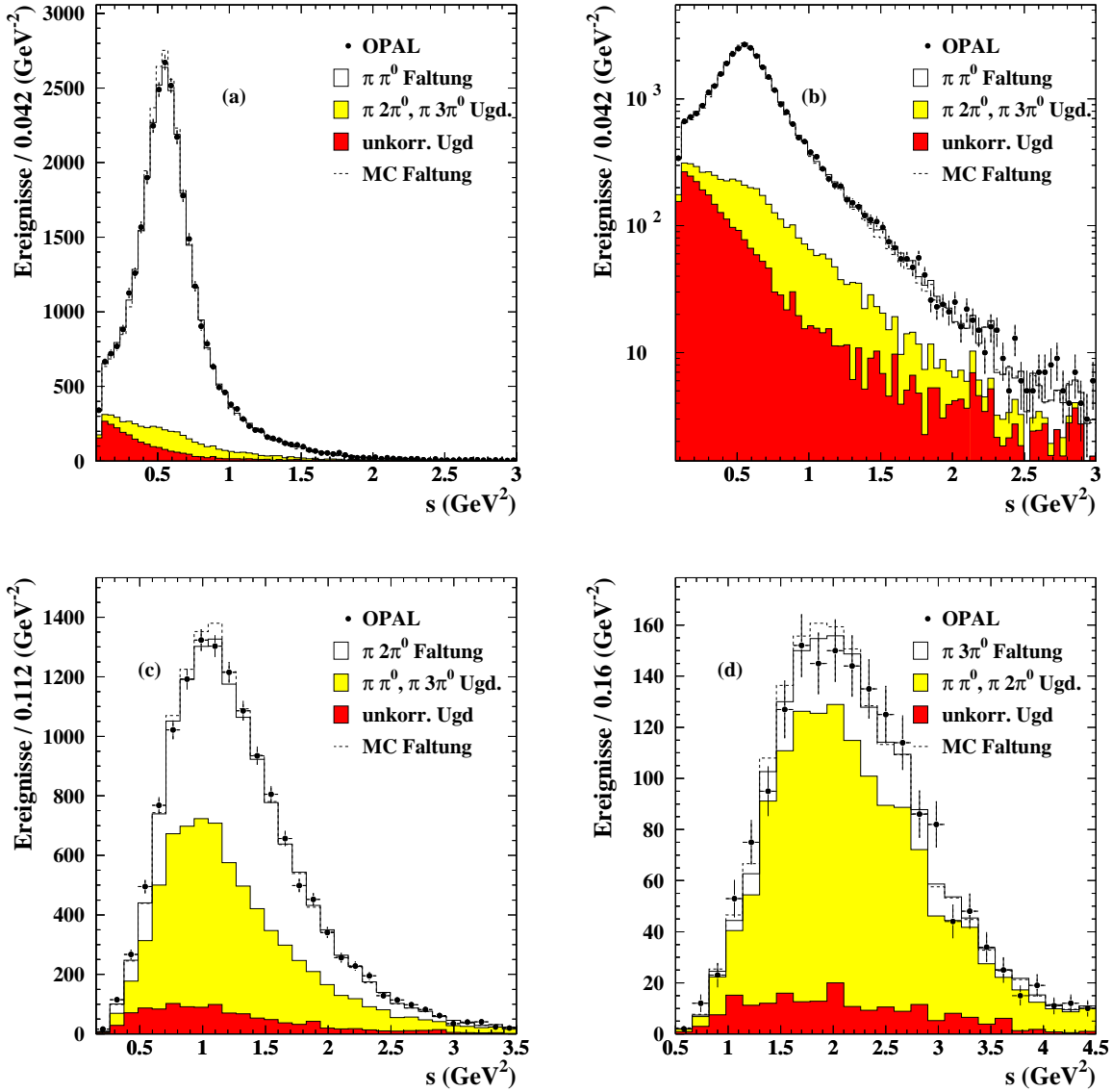


Abbildung 7.1: Die gemessenen  $s_{meas}$ -Spektren für einspurige Zerfälle. Bilder (a) und (b) zeigen den  $\pi\pi^0$ -Kanal, Bild (c) den Kanal  $\pi 2\pi^0$  und Bild (d) den  $\pi 3\pi^0$ -Kanal. Die Punkte repräsentieren OPAL-Daten (nur statistische Fehler). Die transparenten Verteilungen zeigen die angepaßten Spektren nach der regularisierten Entfaltung, zurückgefaltet in den Detektor-Raum. Die Untergrundbeiträge gleichzeitig entfalteter Kanäle (korrelierter Untergrund) sind als hellgraue Flächen wiedergegeben, während Untergrund aus anderen Quellen (unkorrelierter Untergrund) in dunkelgrau abgebildet ist. Die gestrichelten Linien entsprechen der Vorhersage der Simulation im Detektorraum.



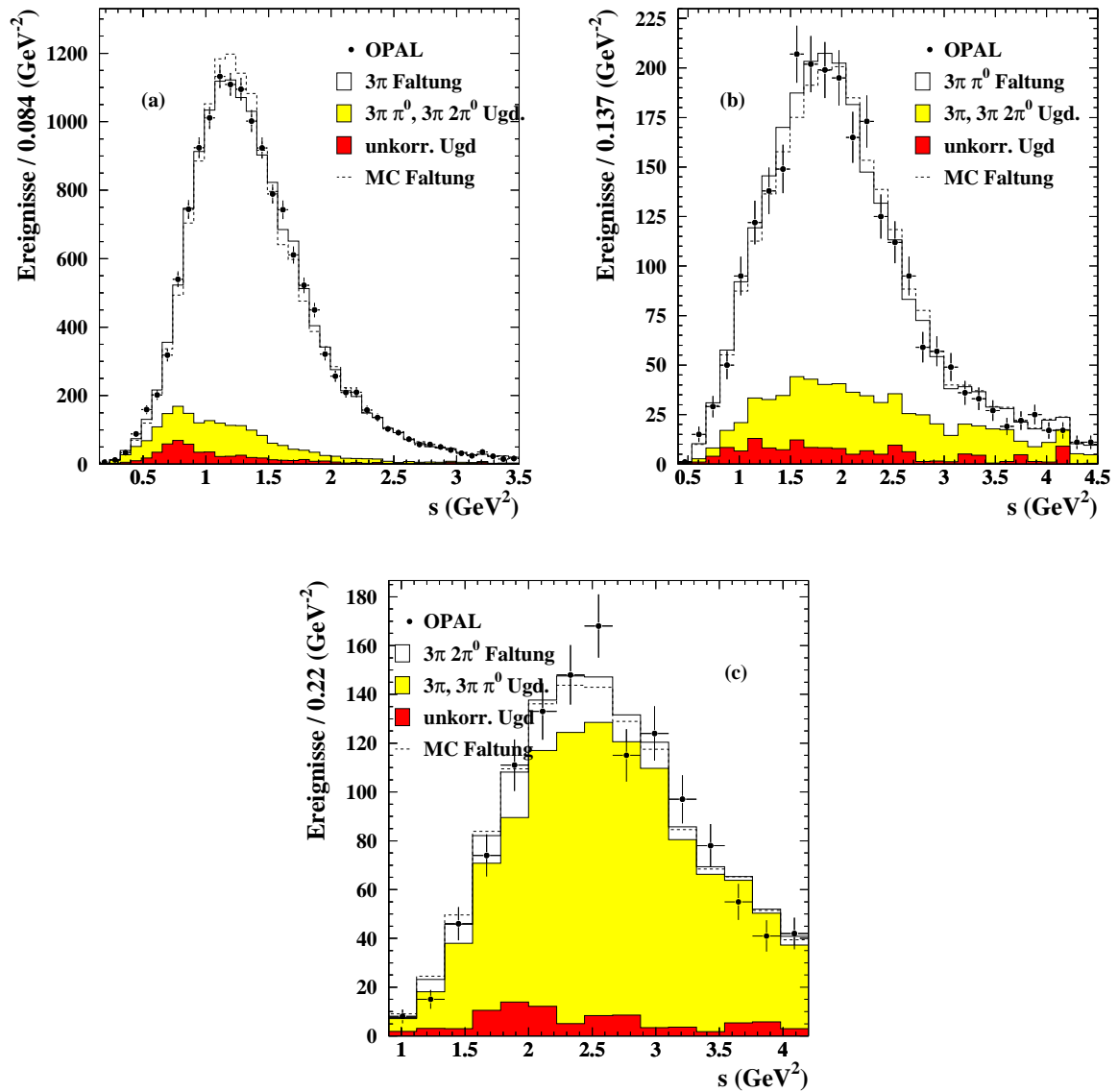


Abbildung 7.2: Die gemessenen  $s_{meas}$ -Spektren für dreispurige Zerfälle. Bild (a) zeigt den  $3\pi$ -Kanal, Bild (b) den Kanal  $3\pi\pi^0$  und Bild (c) den  $3\pi 2\pi^0$ -Kanal. Die Punkte repräsentieren OPAL-Daten (nur statistische Fehler). Die transparenten Verteilungen zeigen die angepaßten Spektren nach der regularisierten Entfaltung, zurückgefaltet in den Detektor-Raum. Die Untergrundbeiträge gleichzeitig entfalteter Kanäle (korrelierter Untergrund) sind als hellgraue Flächen wiedergegeben, während Untergrund aus anderen Quellen (unkorrelierter Untergrund) in dunkelgrau abgebildet ist. Die gestrichelten Linien entsprechen der Vorhersage der Simulation im Detektorraum.

raumverteilung überhöht ist. Besonders deutlich wird dies, wenn man sich die Verteilung der Massen der beiden möglichen neutralen Kombinationen aus drei Pionen im  $3\pi\pi^0$ -Kanal ansieht. Abbildung 7.3 zeigt diese Verteilung für die selektierten  $3\pi\pi^0$ -Zerfälle. Das Spektrum setzt sich aus den richtigen 3-Pion-Kombinationen (transparente Verteilung), den falschen 3-Pion-Kombinationen aus  $\omega\pi$ -Zerfällen (hellgraue Verteilung), anderen  $3\pi\pi^0$ -Zerfällen, die nicht über die  $\omega$ -Resonanz verlaufen (mittelgraue Verteilung) und sonstigem Untergrund aus fehlidentifizierten  $\tau$ -Zerfällen sowie Ereignissen anderen Ursprungs zusammen (dunkelgraue Verteilung). Dabei ist die Vorhersage so korrigiert worden, daß gemäß den Verzweungsverhältnissen  $B(\tau \rightarrow \nu_\tau 3\pi\pi^0)$ ,  $B(\tau \rightarrow \nu_\tau \omega\pi)$  und  $B(\omega \rightarrow 2\pi\pi^0)$  40% [1] aller  $\tau \rightarrow \nu_\tau 3\pi\pi^0$ -Zerfälle über die  $\omega$ -Resonanz verlaufen. In der hier benutzten Simulation ist lediglich in 29% der  $3\pi\pi^0$ -Zerfälle die  $\omega$ -Resonanz enthalten. Die Vorhersage der unkorrigierten Simulation ist in Abbildung 7.3 gestrichelt eingezeichnet. Der Vergleich des in den Detektor-Raum zurückgefalteten Ergebnisses für den  $3\pi\pi^0$ -

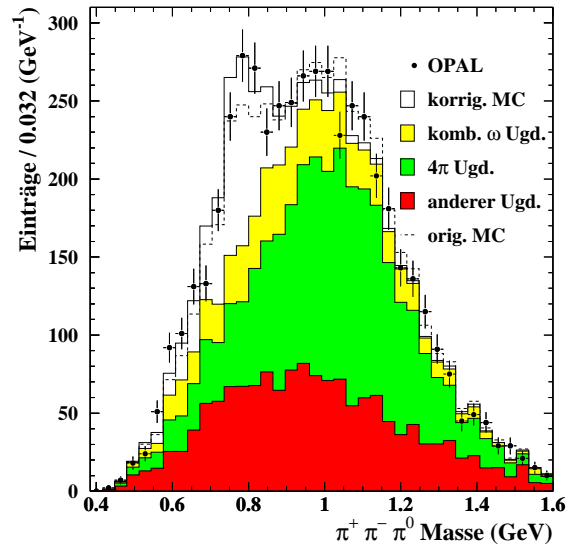


Abbildung 7.3: Masse des ungeladenen 3-Pion-Subsystems im  $3\pi\pi^0$ -Kanal. Die Punkte zeigen OPAL-Daten, wobei beide möglichen neutralen Kombinationen aus drei Pionen für selektierte  $3\pi\pi^0$ -Zerfälle in die Verteilung eingegangen sind. Die transparente Fläche entspricht dem simulierten und korrigierten Anteil der richtigen Kombinationen aus  $\omega\pi$ -Zerfällen. Die gestrichelte Linie zeigt die originale Verteilung ohne Korrektur. In hellgrau ist der Anteil falscher Kombinationen aus  $\omega\pi$ -Zerfällen abgebildet. Der übrige Untergrund ist aufgeteilt in  $3\pi\pi^0$ -Zerfälle ohne  $\omega$  (mittelgrau) und sonstigen Untergrund aus  $\tau$ - und anderen Ereignissen (dunkelgrau).

Kanal (die transparente Verteilung in Abbildung 7.2(b)) mit der Vorhersage der Simulation (die gestrichelte Verteilung im gleichen Bild) zeigt, daß die Entfaltung die Korrektur des  $\omega\pi$ -Anteils im  $3\pi\pi^0$ -Kanal „automatisch“ durchführt, und nach der Entfaltung die Verteilung im Detektor-Raum zu niedrigeren  $s$ -Werten verschoben ist. Dieser Test zeigt explizit, daß die Entfaltung weitestgehend unabhängig von der für die Simulation gewählten Form der Spektren eine Korrektur der Detektoreffekte ermöglicht.

Die Spektren der Kanäle  $\pi^+\pi^-\pi^0$  und  $3\pi^+\pi^0$  sind, aufgrund ihrer hohen Untergrundanteile und der kleinen Anzahl insgesamt in diesen Kanälen selektierter Ereignisse, mit großen Unsicherheiten behaftet und stimmen im Rahmen ihrer Fehler mit den vorhergesagten Spektren überein.

### 7.1.1 Entfaltung der Daten

Die in Kapitel 6 beschriebene Methode, um aus den gemessenen Spektren die wahrscheinlichsten Verteilungen der Massenquadrate zu erhalten, wird nun simultan auf die drei einspurigen (dreispurigen) Spektren angewandt.

Kanal $k$	$m_k$	$m_0$	$n_k$	$y_{\min}$	$y_{\max}$	$x_{\min}$	$x_{\max}$
$\pi\pi^0$	30	} 16	70	0.07	3.00	0.10	2.40
$\pi 2\pi^0$	15		30	0.15	3.50	0.29	2.94
$\pi 3\pi^0$	9		25	0.50	4.50	0.48	3.17
$3\pi$	20	} 16	40	0.15	3.50	0.29	2.94
$3\pi\pi^0$	15		30	0.40	4.50	0.61	3.17
$3\pi 2\pi^0$	7		15	0.90	4.20	0.99	3.17

Tabelle 7.1: Parameter für die Entfaltung der Spektren. Die obere Hälfte der Tabelle enthält die Parameter für die drei einspurigen Kanäle und in der unteren Hälfte sind die Parameter für die drei dreispurigen Kanäle angegeben.

In Tabelle 7.1 sind die für die Entfaltung relevanten Parameter der selektierten Kanäle zusammengestellt. Die Anzahl der Spline-Funktionen  $m_k$  für jedes Spektrum richtet sich nach der Auflösung in  $y \equiv s_{\text{meas}}$  und sollte etwa halb so groß wie die Anzahl der betrachteten Intervalle in  $y$  sein [63]. Aus Tests der Methode mit simulierten Datensätzen für ein zu entfaltendes Spektrum und die Detektormatrix (siehe z.B. Abbildung 6.3) ist für jeden Signalkanal ein günstiger Bereich für die Anzahl der Intervalle in  $y$  und die Anzahl der zu verwendenden Spline-Funktionen bestimmt worden. Die Wahl dieser Parameter ist allerdings nicht kritisch, sondern es werden über einen weiten Bereich konsistente Resultate erzielt.

Die Grenzen im  $y$ -Raum ergeben sich aus den gemessenen Spektren, so daß Bereiche in denen keine Daten gemessen werden ausgeschlossen werden, während die Grenzen im  $x$ -Raum aus den kinematischen Grenzen für die einzelnen Kanäle folgen. Die Obergrenze sollte dann immer bei  $m_\tau^2$  liegen, muß bei den schmalen Resonanzen  $\rho \rightarrow \pi\pi^0$  und  $a_1 \rightarrow 3\pi(\pi 2\pi^0)$  wegen der zu kleinen Anzahl simulierter Zerfälle an der Obergrenze auf niedrigere Werte eingeschränkt werden.

Aus der Entfaltung selbst kann durch den Signifikanztest der angepaßten Koeffizienten die Anzahl  $m_0$  der effektiven Spline-Funktionen bestimmt werden. In Abbildung 7.4 sind für beide Entfaltungen die Koeffizienten des nach Signifikanz und Krümmung geordneten Vektors  $\mathbf{a}'$  dargestellt. In beiden Fällen sind ab  $j \simeq 16$  alle Koeffizienten mit Null verträglich, so daß für die beiden Entfaltungen  $m_0 = 16$  gewählt worden ist. Die Wahl dieses Grenzwertes ist allerdings nicht zwingend. Auch Koeffizienten, die im signifikanten Bereich liegen, können Werte nahe Null annehmen, und umgekehrt können, bei einer genügenden Anzahl statistisch um Null verteilter Werte, auch Abweichungen von einigen  $\sigma$  auftreten. Die Unterschiede aus den Entfaltungen bei  $m_0 = 16 \pm 4$  werden daher als systematische Unsicherheit der Entfaltung in den resultierenden Spektren berücksichtigt.

Die  $\chi^2$ -Werte aus der Entfaltung, die entsprechend der Gleichung (6.31) mit dem regularisierten Vektor  $\hat{\mathbf{f}}$  für  $\mathbf{f}$  bestimmt worden sind, ergeben sich zu  $\chi_{1-\text{spur}}^2 = 94.0$  bei 109 Freiheitsgraden für die einspurige Entfaltung bzw.  $\chi_{3-\text{spur}}^2 = 71.4$  bei 69 Freiheitsgraden für die dreispurige Entfaltung. Die Wahrscheinlichkeiten, diese oder schlechtere Werte für  $\chi^2$  zu messen, betragen 0.85 bzw. 0.40.

In Abbildung 7.5 ist das entfaltete Spektrum für den  $\pi\pi^0$ -Kanal dargestellt. Die Punkte entsprechen den entfalteten Daten und die eingezeichneten Fehler enthalten statistische wie systematische Unsicherheiten (siehe Abschnitt 7.1.2). Die der Simulation zugrunde liegende Vertei-

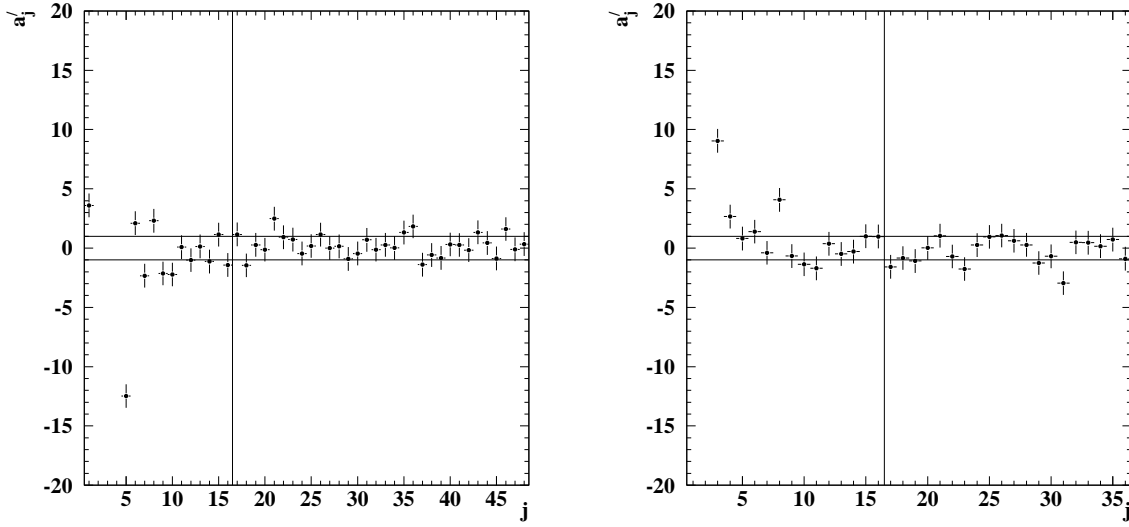


Abbildung 7.4: Nach Signifikanz und Krümmung geordnete, unabhängige Koeffizienten der Entfaltung. Das linke Bild zeigt das Entfaltungsergebnis für einspurige Zerfälle; Das rechte Bild zeigt den dreispurigen Fall. In beiden Entfaltungen sind die Koeffizienten ab  $m_0 = 16$  nicht mehr signifikant von Null verschieden. Die vertikale Linie deutet diese Grenze an. Die horizontalen Linien entsprechen dem  $\pm 1\sigma$  Bereich um Null, in dem die Mehrzahl der Koeffizienten rechts der Grenze liegen.

lung der quadrierten  $\pi\pi^0$ -Masse gibt die gestrichelte Linie wieder. Abweichungen des entfalteten Resultats von der Vorhersage in der Resonanzregion sind in der linearen Darstellung gut zu erkennen (Bild (a)), während in der logarithmischen Darstellung (Bild (b)) Abweichungen in den Flanken der Resonanz deutlich werden. Das Modell, das in der Simulation mit TAUOLA 2.4 die  $\pi\pi^0$ -Verteilung beschreibt, beruht auf einer phänomenologisch motivierten Breit-Wigner-Verteilung [64], die folgende Form hat:

$$\frac{dN_{\pi\pi^0}}{ds} \propto \left(1 - \frac{s}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + 2\frac{s}{m_\tau^2}\right) \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{s}\right)^{3/2} \left| \frac{BW_\rho(s) + \beta BW_{\rho'}(s) + \gamma BW_{\rho''}(s)}{1 + \beta + \gamma} \right|^2. \quad (7.1)$$

Die beiden ersten Terme stammen aus der Form des Phasenraums für den  $\tau$ -Zerfall in Hadronen. Der Faktor  $(1 - 4m_\pi^2/s)^{3/2}$  berücksichtigt den Phasenraum für den Zerfall eines Hadrons in zwei Pionen und der letzte Term entspricht dem Quadrat der Amplitude für eine Mischung aus der  $\rho$ -, der  $\rho'$ - und der  $\rho''$ -Resonanz mit den Mischungsverhältnissen  $\beta$  und  $\gamma$  sowie den Amplituden

$$BW_\rho(s) = \frac{m_\rho^2}{m_\rho^2 - s - im_\rho\Gamma_\rho(s)}$$

$$\Gamma_\rho(s) = \Gamma_\rho \frac{m_\rho}{\sqrt{s}} \left( \frac{p_\pi(s)}{p_\pi(m_\rho^2)} \right)^3, \quad (7.2)$$

in die die Masse  $m_\rho$ , die Breite  $\Gamma_\rho$  und die Impulse der Pionen  $p_\pi$  im Ruhesystem des  $\rho$ -Mesons (bzw. die entsprechenden ein- oder zweigestrichenen Größen für die  $\rho'$ - und  $\rho''$ -Mesonen) eingehen.

Die Anpassung einer Verteilung der Form (7.1) an die entfalteten Daten ist als graues Fehlerband in Abbildung 7.5 zu sehen. Als freie Parameter sind hier die Massen  $m_\rho$  und  $m_{\rho'}$ , die

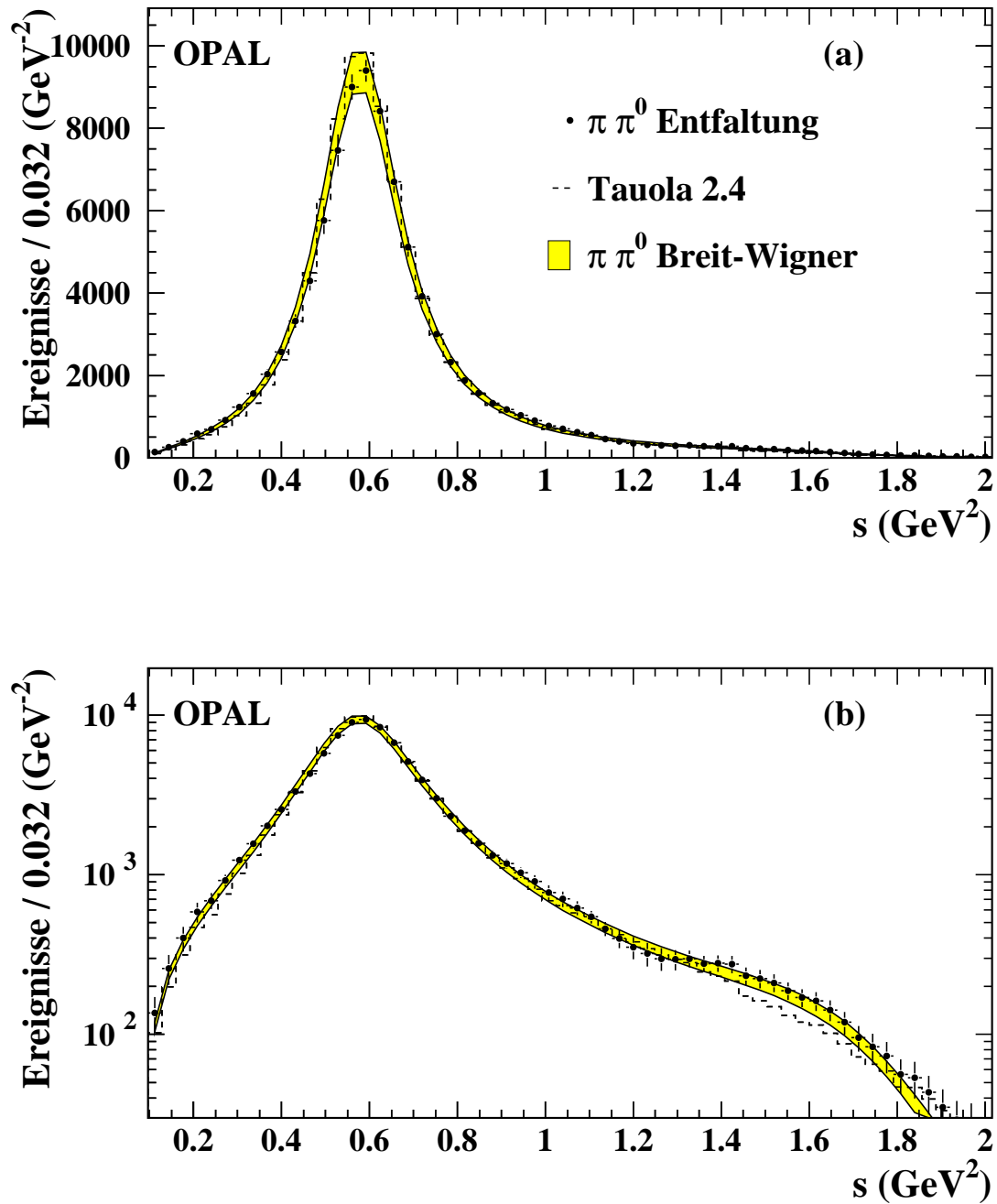


Abbildung 7.5: Entfaltetes Spektrum für den  $\pi\pi^0$ -Kanal. Dargestellt ist das Entfaltungsergebnis (Punkte) im Vergleich mit der Verteilung, die der Simulation zugrunde liegt (gestrichelte Linie). Eine Anpassung einer Breit-Wigner-Kurve, die die drei Resonanzen  $\rho$ ,  $\rho'$  und  $\rho''$  berücksichtigt, an das entfaltete Spektrum zeigt das graue Fehlerband. Die Fehler entsprechen statistischen und systematischen Unsicherheiten. Die Bilder (a) und (b) zeigen die gleichen Spektren auf einer linearen bzw. logarithmischen Skala.

totalen Breiten  $\Gamma_\rho$  und  $\Gamma_{\rho'}$  sowie die beiden Mischungsverhältnisse  $\beta$  und  $\gamma$  gewählt worden, während  $m_{\rho''} = 1700 \text{ MeV}$  [1] und  $\Gamma_{\rho''} = 235 \text{ MeV}$  [1] in der Anpassung auf ihre Zentralwerte fixiert wurden. Die Bestimmung der freien Parameter berücksichtigt die starken Punkt-zu-Punkt-Korrelationen in dem entfalteten Spektrum sowie die statistischen und systematischen Unsicherheiten.

Parameter	Anpassung	PDG-Wert	Simulation
$m_\rho/\text{MeV}$	$773.7 \pm 2.4$	$768.5 \pm 0.6$	773
$\Gamma_\rho/\text{MeV}$	$155.4 \pm 3.9$	$150.7 \pm 1.2$	145
$m_{\rho'}/\text{MeV}$	$1329 \pm 14$	$1465 \pm 25$	1370
$\Gamma_{\rho'}/\text{MeV}$	$243 \pm 40$	$310 \pm 60$	510
$m_{\rho''}/\text{MeV}$	(1700)	$1700 \pm 20$	—
$\Gamma_{\rho''}/\text{MeV}$	(235)	$235 \pm 50$	—
$\beta$	$-0.111 \pm 0.019$	—	-0.145
$\gamma$	$0.033 \pm 0.022$	—	—
$\chi^2/\text{d.o.f.}$	50.6/65	—	—

Tabelle 7.2: Parameter aus der Anpassung einer Breit-Wigner-Verteilung an das  $\pi\pi^0$ -Spektrum. Die Resultate und ihre Fehler stehen in der zweiten Spalte. Die Weltmittelwerte [1] sind in der dritten Spalte angegeben. In der Simulation sind die Werte, die in der letzten Spalte stehen, benutzt worden.

Das Resultat sowie die aktuellen Weltmittelwerte der angepaßten Größen und die in der Simulation eingestellten Parameter sind in Tabelle 7.2 wiedergegeben. Das resultierende  $\chi^2 = 50.6$  bei 65 Freiheitsgraden der Anpassung zeigt, daß hier die Verteilung gut durch den Breit-Wigner-Ansatz beschrieben werden kann. Insbesondere läßt sich die Abweichung des gemessenen Spektrums von der Vorhersage im Bereich der rechten Flanke mit einer modifizierten Beimischung  $\beta = -0.111 \pm 0.019$  der  $\rho'$ -Resonanz, die mit  $\Gamma_{\rho'} = (243 \pm 40) \text{ MeV}$  deutlich schmaler als in der Simulation, die für diesen Wert 510 MeV annimmt, ausfällt, erklären. Die Beimischung der  $\rho''$ -Amplitude trägt mit  $\gamma = 0.033 \pm 0.022$  kaum signifikant zu der beobachteten Verteilung bei, da der Phasenraum für  $\tau$ -Zerfälle in Hadronen bei der  $\rho''$ -Masse bereits sehr klein ist.

Die Masse des  $\rho$ -Mesons liegt mit  $m_\rho = (773.7 \pm 2.4) \text{ MeV}$  etwa zwei Standardabweichungen über dem Weltmittelwert  $m_\rho = (768.5 \pm 0.6) \text{ MeV}$  [1], dem Messungen der Masse des geladenen wie auch des neutralen  $\rho$ -Mesons zugrunde liegen. Die Messung der Breite  $\Gamma_\rho = (155.4 \pm 3.9) \text{ MeV}$  stimmt im Rahmen des Fehlers mit dem PDG-Wert  $\Gamma_\rho = (150.7 \pm 1.2) \text{ MeV}$  überein. Die Masse des  $\rho'$ -Mesons zeigt mit  $m_{\rho'} = (1329 \pm 14) \text{ MeV}$  die deutlichste Abweichung (4.7 Standardabweichungen) vom Weltmittelwert  $m_{\rho'} = (1465 \pm 25) \text{ MeV}$ , während die Breite mit  $\Gamma_{\rho'} = (243 \pm 40) \text{ MeV}$  in guter Übereinstimmung mit dem PDG-Wert  $\Gamma_{\rho'} = (310 \pm 60) \text{ MeV}$  ist. Allerdings sind die Parameter für das  $\rho'$  in dieser Anpassung sehr stark von dem Modell, das der  $\rho$ -Resonanz zugrunde liegt, abhängig, da der dominante Anteil der Daten auch im Bereich der  $\rho'$ -Beimischung durch die  $\rho$ -Resonanz erzeugt wird. Ein Vergleich mit den PDG-Werten ist deshalb problematisch. Die Parameter sollen daher lediglich zeigen, daß im Rahmen eines Breit-Wigner-Modells das entfaltete Spektrum beschrieben werden kann. Im weiteren wird aber nur das Spektrum selbst und nicht diese Anpassung an das Spektrum verwendet.

Die entfalteten Spektren für den  $3\pi^-$ - sowie den  $\pi 2\pi^0$ -Kanal sind in Abbildung 7.6 dargestellt. Die bereits in der Diskussion der  $s_{\text{meas}}$ -Spektren in Abschnitt 7.1 erwähnten Abweichungen von den simulierten Spektren sind hier besonders gut zu erkennen.

Die simulierten Spektren für die beiden Kanäle mit drei Pionen sind, von dem kleinen Massenunterschied zwischen neutralen und geladenen Pionen abgesehen, identisch. Ihnen liegt, ähn-

lich wie im Fall des  $\pi\pi^0$ -Spektrums, eine einfache Breit-Wigner-Verteilung, die die Zerfallskette  $a_1^\pm \rightarrow \rho^{\pm,0}\pi^{0,\pm} \rightarrow \pi^\pm\pi^{\pm,0}\pi^\mp,0$  beschreibt, zugrunde [64]:

$$\frac{dN_{3\pi,\pi 2\pi^0}}{ds} \propto \left(1 - \frac{s}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + 2\frac{s}{m_\tau^2}\right) |BW_{a_1}(s)|^2 \frac{g(s)}{s}, \quad (7.3)$$

mit

$$\begin{aligned} BW_{a_1}(s) &= \frac{m_{a_1}^2}{m_{a_1}^2 - s - im_{a_1}\Gamma_{a_1}(s)}, & \Gamma_{a_1}(s) &= \Gamma_{a_1} \frac{g(s)}{g(m_{a_1}^2)} \\ g(s) &= - \int \frac{ds_1 ds_2}{s} \left( V_1^2 |BW_2|^2 + V_2^2 |BW_1|^2 + V_1 V_2 (BW_1 BW_2^* + BW_1^* BW_2) \right) \\ V_{1,2}^2 &= 4m_\pi^2 - s_{2,1} - \frac{1}{4s} \left( s - 2s_{1,2} - s_{2,1} + 3m_\pi^2 \right)^2 \\ V_1 V_2 &= \frac{1}{4} \left( 8m_\pi^2 + 3s - s_1 - s_2 \right) - \frac{1}{4s} \left( -2s_1 - s_2 + 3m_\pi^2 \right) \left( -s_1 - 2s_2 + 3m_\pi^2 \right) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Die Funktion  $BW_{1,2} = (BW_\rho(s_{1,2}) + \beta BW_{\rho'}(s_{1,2})) / (1 + \beta)$  sind die Breit-Wigner-Amplituden (7.2) der möglichen Zwischenresonanzen aus  $\rho$ - und  $\rho'$ -Mesonen, die von den Massenquadraten  $s_{1,2}$  der beiden ladungsneutralen Kombinationen zweier Pionen im Endzustand  $3\pi$ , bzw. den beiden geladenen Kombinationen im  $\pi 2\pi^0$ -Endzustand, abhängen. Die Faktoren  $V_{1,2}$  berücksichtigen den Phasenraum für den Zweikörper-Zerfall des  $a_1$ -Mesons und den anschließenden Zweikörper-Zerfall des  $\rho$ -Mesons.

Allerdings gelingt hier, anders als im  $\pi\pi^0$ -Fall, keine Anpassung dieses Modells an die Daten. Die den Spektren überlagerten grauen Fehlerbänder zeigen die Resultate dieser Anpassungsversuche. Variiert wurden hier die Masse des  $a_1$ -Mesons, seine Breite und das Mischungsverhältnis der  $\rho$ - und  $\rho'$ -Amplituden, wobei Massen und Breiten dieser Zwischenresonanzen auf die Weltmittelwerte aus [1] fixiert wurden.

Parameter	$3\pi$ -Anpassung	$\pi 2\pi^0$ -Anpassung	PDG-Wert	Simulation
$m_{a_1}/\text{MeV}$	$1233.9 \pm 6.3$	$1213 \pm 12$	$1230 \pm 40$	1250
$\Gamma_{a_1}/\text{MeV}$	$510 \pm 22$	$396 \pm 28$	$\approx 400$	600
$\beta$	$0.20 \pm 0.10$	$0.13 \pm 0.13$	—	0
$\chi^2/\text{d.o.f.}$	128.5/79	65.3/79	—	—

Tabelle 7.3: *Parameter aus der Anpassung der Breit-Wigner-Verteilungen an das  $3\pi$ - und das  $\pi 2\pi^0$ -Spektrum. Die  $3\pi$ -Resultate stehen in der zweiten Spalte und die  $\pi 2\pi^0$ -Resultate in der dritten Spalte. Die Weltmittelwerte [1] sind in der vierten Spalte angegeben. In der Simulation sind die Werte, die in der letzten Spalte stehen, benutzt worden.*

Die  $\chi^2$ -Werte für die beiden Anpassungen sind  $\chi_{3\pi}^2 = 128.5$  für den  $3\pi$ -Kanal und  $\chi_{\pi 2\pi^0}^2 = 65.3$  für den  $\pi 2\pi^0$ -Kanal bei je 79 Freiheitsgraden. Aus der sehr niedrigen  $\chi^2$ -Wahrscheinlichkeit von nur 0.04 % im  $3\pi$ -Kanal, kann man schließen, daß dieses Modell zu einfach ist, um die Resonanzstruktur zu erklären. Die möglichen Erweiterungen des Modells durch skalare Beiträge ( $\pi(1300)$ ) oder die Verbreiterung der Resonanz durch den Zerfallskanal  $a_1 \rightarrow \text{KK}^*(892)$  sind hier allerdings nicht untersucht worden. Eine detaillierte Analyse des hadronischen Stroms im  $\tau \rightarrow \nu_\tau 3\pi$ -Zerfall findet man in [65, 66], wo ähnliche Abweichungen des  $s$ -Spektrums von der Breit-Wigner-Vorhersage gefunden wurden.

Die Anpassung im  $\pi 2\pi^0$ -Kanal ist formal betrachtet bei einer  $\chi^2$ -Wahrscheinlichkeit von 90 % erfolgreich verlaufen. Die großen Punkt-zu-Punkt-Korrelationen im entfalteten Spektrum führen

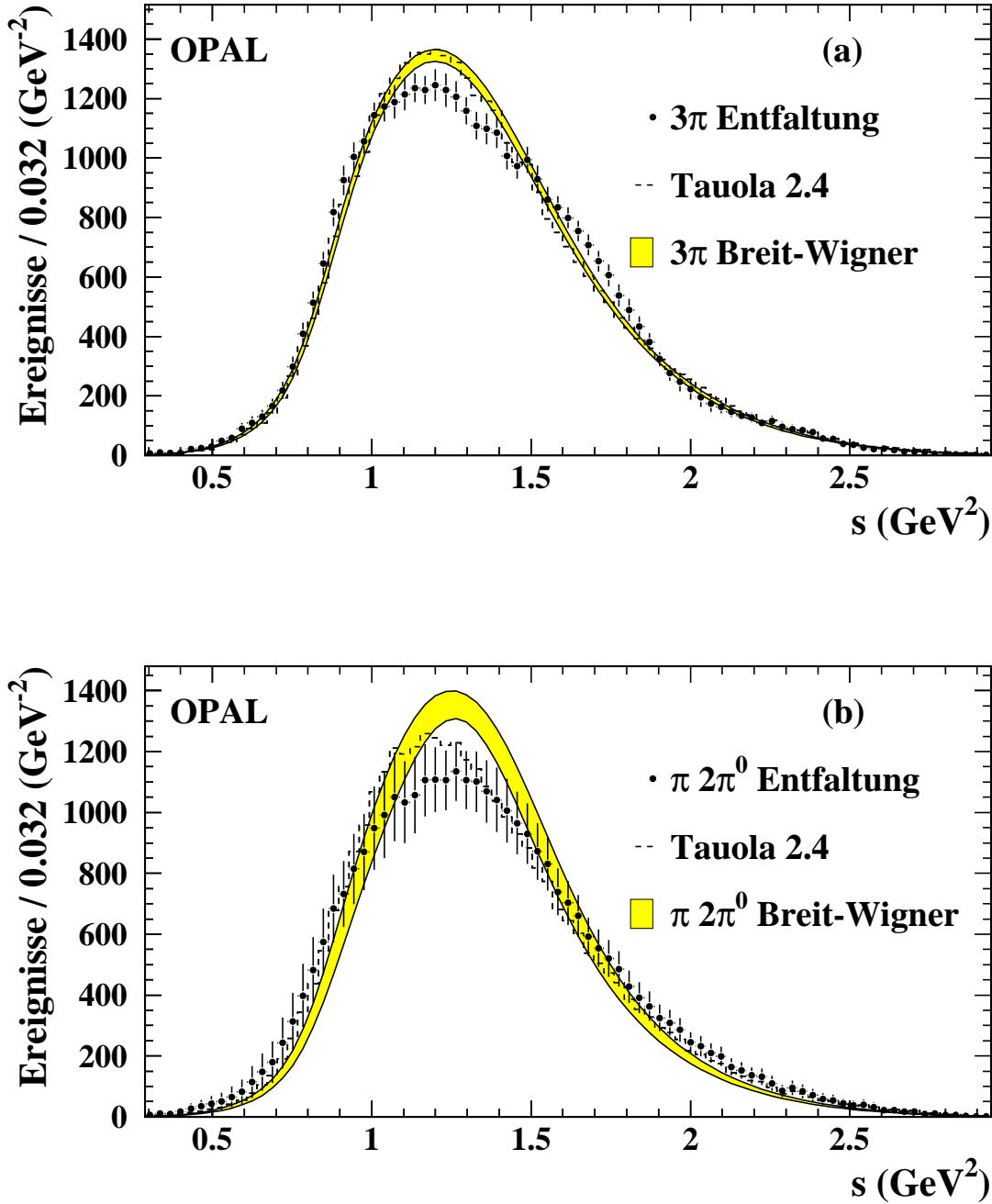


Abbildung 7.6: Entfaltete Spektren für den  $3\pi$ - und den  $\pi 2\pi^0$ -Kanal. Dargestellt sind die Entfaltungsergebnisse (Punkte) im Vergleich mit den Verteilungen, die der Simulation zugrunde liegen (gestrichelte Linien). Anpassungen je einer Breit-Wigner-Kurve, die die Zerfallskette  $a_1^\pm \rightarrow \rho^{\pm,0} \pi^{0,\pm} \rightarrow \pi^\pm \pi^{\pm,0} \pi^{\mp,0}$  beschreibt, an die entfalteten Spektren zeigen die grauen Fehlerbänder. Die Fehler entsprechen statistischen und systematischen Unsicherheiten. Bild (a) zeigt den  $3\pi$ -Kanal, und Bild (b) zeigt den  $\pi 2\pi^0$ -Kanal.



aber dazu, daß die angepaßte Kurve auch hier die Verteilung nur unvollkommen beschreibt. Zu den Schwierigkeiten eines Vergleichs des  $3\pi$ -Kanals mit dem  $\pi 2\pi^0$ -Kanal sei hier auf [67] verwiesen. Der Vollständigkeit halber sind in Tabelle 7.3 die Resultate beider Anpassungen aufgeführt, werden für die Extraktion der QCD-Parameter aber nicht benutzt.

Die entfalteten Spektren der Kanäle  $3\pi\pi^0$ ,  $\pi 3\pi^0$  und  $3\pi 2\pi^0$  sind in Abbildung 7.7 dargestellt. Die leichte Abweichung des  $3\pi\pi^0$ -Spektrums von der Vorhersage, ist mit der Anreicherung der  $\omega$ -Zwischenresonanz, die bereits in Abschnitt 7.1 diskutiert wurde, zu erklären. Die beiden anderen Spektren sind gegenüber den generierten Verteilungen etwas zu höheren  $s$ -Werten verschoben. Alle drei stimmen aber im Rahmen ihrer Fehler mit den Vorhersagen überein.

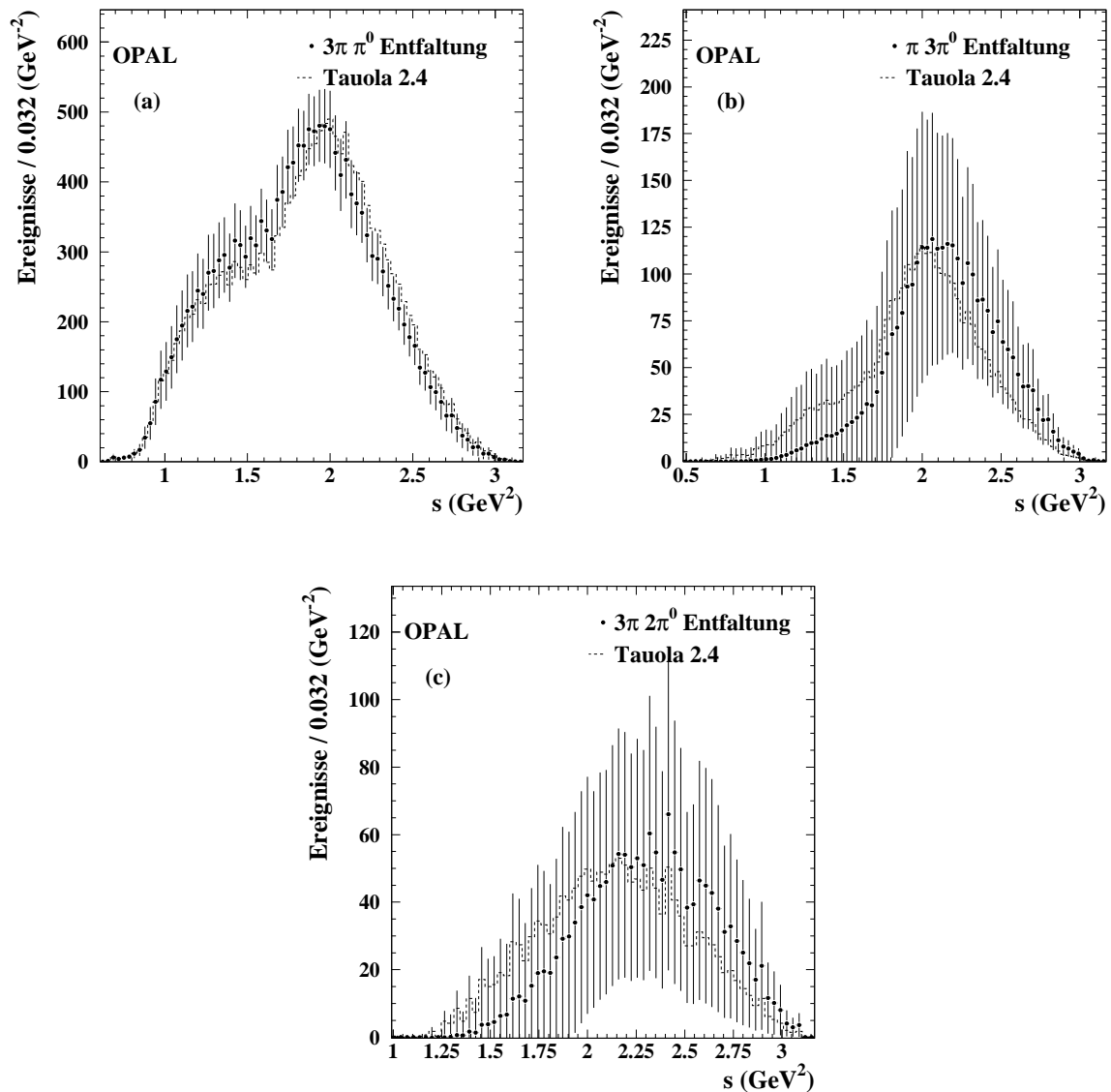


Abbildung 7.7: Entfaltete Spektren für die Kanäle  $3\pi\pi^0$  (a),  $\pi 3\pi^0$  (b) und  $3\pi 2\pi^0$  (c). Dargestellt sind die Entfaltungsergebnisse (Punkte) im Vergleich mit den Verteilungen, die der Simulation zugrunde liegen (gestrichelte Linien).

### 7.1.2 Systematische Fehler

Mögliche Ursachen für systematische Effekte in den rekonstruierten Massenquadraten  $s_{\text{meas}}$  der Hadronen stellen die Unsicherheit der Energiekalibration des elektromagnetischen Kalorimeters bei der Rekonstruktion neutraler Pionen sowie die Unsicherheit in der Impulsauflösung der Spur-Kammern bei der Rekonstruktion der Impulse geladener Pionen dar. Ferner kann, wie bereits in Kapitel 6 angesprochen, die Wahl eines zu kleinen oder zu großen Dämpfungsparameters  $\rho$  die entfalteten Verteilungen systematisch verzerren. Der letztangesehene Effekt ist mit der Variation der effektiven Anzahl der Spline-Funktionen  $m_0 = 16 \pm 4$  (Abschnitt 7.1.1), die in ein- und dreispurigen Zerfällen nach der Entfaltung übrig bleiben, bereits berücksichtigt worden.

Die Energiekalibration kann mit der Messung der invarianten Masse von Photonenaaren, die aus  $\pi^0$ -Zerfällen stammen, getestet werden. Nimmt man an, daß die Energie  $\tilde{E} = (1 + \Delta_E)E$  jedes Photons um einen Bruchteil  $\Delta_E$  systematisch anders rekonstruiert wird als in der Simulation vorhergesagt, wird auch die rekonstruierte Masse

$$\tilde{m}_{\gamma_1\gamma_2} = \sqrt{\tilde{E}_1\tilde{E}_2}\sqrt{2(1 + \cos\theta)} = (1 + \Delta_E)m_{\gamma_1\gamma_2}, \quad (7.5)$$

wobei  $\cos\theta$  der Winkel zwischen den Flugrichtungen der beiden Photonen ist, um den gleichen Bruchteil  $\Delta_E$  systematisch falsch berechnet. Aus der Massenverteilung in Abbildung 5.9 findet man einen mittleren Massenunterschied von  $\tilde{m} - m = (0.5 \pm 0.9) \text{ MeV}$  bei einer mittleren rekonstruierten Masse von  $\bar{m} = (135.0 \pm 0.4) \text{ MeV}$ , wenn man das Intervall  $0 \text{ MeV} < m < 250 \text{ MeV}$  betrachtet. Damit erhält man für den Skalierungsfaktor der Energie

$$1 + \Delta_E = 1 + \frac{\tilde{m} - m}{\bar{m}} = 1.004 \pm 0.007. \quad (7.6)$$

Ein signifikanter systematischer Effekt wird also nicht beobachtet. Da dieser Test allerdings eine begrenzte Genauigkeit besitzt, wird eine mögliche Unsicherheit in der Energiekalibration durch die Variation der Energien der rekonstruierten Photonen in allen simulierten Datensätzen um  $\pm 0.7\%$  berücksichtigt. Die Ursache einer systematischen Massenabweichung kann natürlich auch eine mögliche Fehlrekonstruktion der Winkel der Photonen sein. Da aber umgekehrt von der Massenabweichung eine Skalierung der Energien abgeleitet wird, ist ein möglicher Effekt dieser Art in der Fehlerbetrachtung enthalten.

Die Impulsauflösung der Spur-Kammern ist mit  $\mu$ -Paaren untersucht worden, da in dieser Ereignisklasse die Impulse der beiden Myonen  $p_\mu = E_{\text{beam}}$  bekannt sind. Vergleicht man die Verteilung in  $p_\mu/E_{\text{beam}}$  für selektierte Daten mit der Simulation (Abbildung 7.8 (a)), erkennt man, daß die Auflösung in den Daten etwas besser ist als die Simulation vorhersagt. Für 20 Intervalle in  $|\cos\theta|$  zwischen 0 und 1, wobei  $\theta$  der Polarwinkel der Ereignisachse ist, sind Mittelwert und Streuung der Verteilungen aus der Simulation den entsprechenden Werten aus den Daten angepaßt worden. Korrigiert man die Impulse in der Simulation entsprechend, ergibt sich die Verteilung in Abbildung 7.8 (b), die besser mit den Daten übereinstimmt.

Um die Unsicherheit durch die Impulsauflösung in hadronischen  $\tau$ -Zerfällen zu bestimmen, sind die rekonstruierten Impulse aller simulierten Datensätze gemäß dieser Anpassung variiert worden, und der Unterschied der Ergebnisse mit und ohne die Korrektur wird als systematischer Fehler durch die Impulsauflösung in den Resultaten berücksichtigt.

Unsicherheiten statistischer Natur, die durch die limitierte Anzahl simulierter Ereignisse, die Fehler der Verzweungsverhältnisse und die Unsicherheit in der Bestimmung der Nachweiswahrscheinlichkeiten gegeben sind, werden in der Entfaltungsprozedur teilweise bereits in Gleichung (6.31) oder in der anschließenden Berechnung der Spektren und der Momente von  $R_\tau$  berücksichtigt.

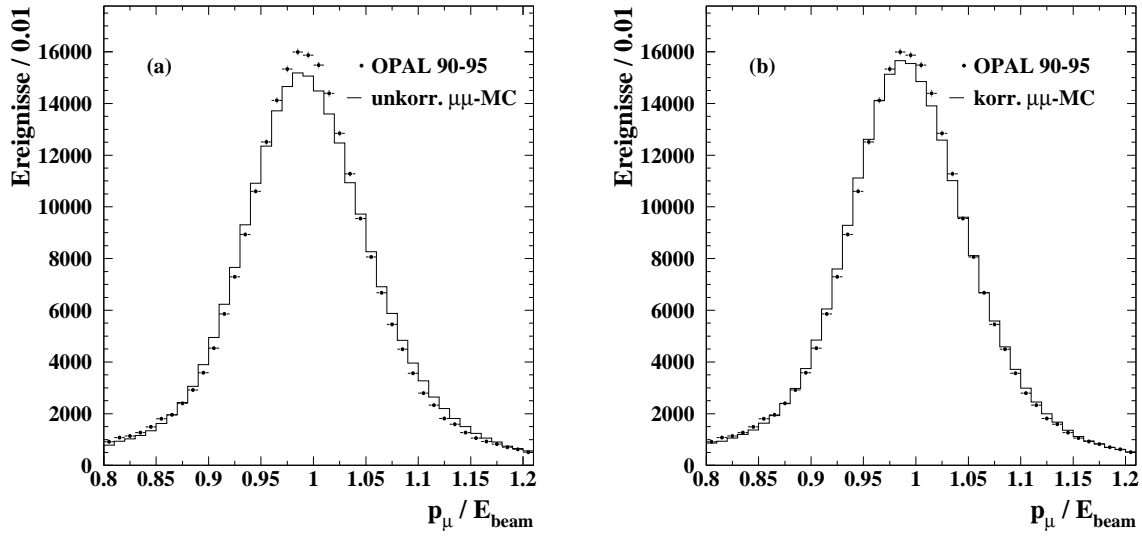


Abbildung 7.8: Test der Impulsauflösung mit  $\mu$ -Paaren. Bild (a) zeigt die Verteilung der auf die Strahlenergie  $E_{\text{beam}}$  normierten Impulse der Myonen aus selektierten  $\mu$ -Paar-Ereignissen. Die Daten sind als Punkte im Vergleich mit der Verteilung aus der Simulation (durchgezogene Linie) dargestellt. Bild (b) zeigt dieselben Daten und die Verteilung aus der korrigierten Simulation.

## 7.2 Spektralfunktionen

Die entfalteten Spektren, die in Abschnitt 7.1.1 gezeigt wurden, werden gemäß der Verzweigungsverhältnisse in Tabelle 7.4 normiert und entsprechend ihrer Gewichte  $w_{V/A}$  zu einem Vektor- und einem Axialvektor-Spektrum aufsummiert. Prinzipiell sind alle Endzustände, in denen eine gerade Anzahl Pionen auftritt, dem Vektorstrom zuzurechnen, während Endzustände mit einer ungeraden Anzahl Pionen dem Axialvektorstrom zugeordnet werden. Die Einteilung in diese beiden Klassen ergibt sich aus den Quantenzahlen für den Spin  $J$  und die Parität  $P$  des Pionsystems. Aus den primären Quarks im semihadronischen  $\tau$ -Zerfall, die aufgrund der  $V - A$ -Struktur der schwachen Wechselwirkung durch einen der beiden Ströme entstanden sind, bildet sich zunächst ein Hadron, das dann in Pionen zerfällt. Da die starke Wechselwirkung sowohl den Spin als auch die Parität erhält, sind die Quantenzahlen des Quarksystems mit den Quantenzahlen des Pionsystems identisch. Pionen selbst sind pseudoskalare Teilchen und haben die Quantenzahlen  $J = 0$  und  $P = -1$ . Setzt sich der Drehimpuls eines  $N$ -Pion-Systems zu  $L = 1$  zusammen, erhält man für die Gesamtparität  $P = (-1)^{N+L} = \begin{cases} -1, & N \text{ gerade} \\ +1, & N \text{ ungerade} \end{cases}$  und der Gesamtspin entspricht dem Drehimpuls  $J = L$ . Das Feld eines Mesons mit Drehimpuls  $J = 1$  und negativer Parität  $P = -1$  (positiver Parität  $P = +1$ ) hat die Transformationseigenschaften eines Vektors (Axialvektors), und deshalb heißen diese Teilchen Vektormesonen (Axialvektormesonen). Der Zerfall  $\tau \rightarrow \nu_\tau \pi$  gehört genaugenommen also nicht zum Axialvektorstrom und taucht in der Spektralfunktion  $\text{Im}\Pi_A^{(1)}$  nicht auf. In  $R_{\tau,A}$  geht dieser Zerfall allerdings ein, da sowohl  $J = 0$ - als auch  $J = 1$ -Zustände zur totalen hadronischen Zerfallsbreite beitragen. Deshalb wird  $w_A = 1$  für diesen Zerfall in Tabelle 7.4 angegeben.

Die Gewichte der ersten elf hadronischen Endzustände in Tabelle 7.4 sind nach diesem einfachen Schema gebildet. Der nächste Endzustand ( $KK^0$ ) ist dem Vektorstrom zuzuordnen, da K-Mesonen wie Pionen pseudoskalare Teilchen sind.

Für Endzustände mit zwei Kaonen und einem Pion könnte man naiv annehmen, daß sie

$\tau \rightarrow \nu_\tau X$	$B[\%]$	$w_V$	$w_A$	Anmerkung
$e\nu_e$	$17.83 \pm 0.08$	–	–	
$\mu\nu_\mu$	$17.35 \pm 0.10$	–	–	
$\pi\pi^0$	$25.24 \pm 0.16$	1.0	0.0	
$3\pi\pi^0$	$4.26 \pm 0.09$	1.0	0.0	inklusive $\omega\pi$ und $\omega\pi\pi^0$
$\pi 3\pi^0$	$1.14 \pm 0.14$	1.0	0.0	
$\pi$	$11.31 \pm 0.15$	0.0	1.0	
$3\pi$	$9.26 \pm 0.12$	0.0	1.0	3h – 2K $\pi$ – K2 $\pi$ inklusive $\omega\pi$
$\pi 2\pi^0$	$9.27 \pm 0.14$	0.0	1.0	
$3\pi 2\pi^0$	$0.50 \pm 0.05$	0.0	1.0	inklusive $\omega\pi\pi^0$ und $\eta\pi\pi^0$
$5\pi$	$0.075 \pm 0.007$	0.0	1.0	MC
$\pi 4\pi^0$	$0.12 \pm 0.06$	0.0	1.0	MC
$3\pi 3\pi^0$	$0.11 \pm 0.06$	1.0	0.0	MC
$5\pi\pi^0$	$0.022 \pm 0.005$	1.0	0.0	MC
$KK^0$	$0.16 \pm 0.03$	1.0	0.0	MC
$2K\pi$	$0.10 \pm 0.03$	$0.5 \pm 0.5$	$0.5 \pm 0.5$	MC
$2K^0\pi$	$0.10 \pm 0.02$	$0.5 \pm 0.5$	$0.5 \pm 0.5$	MC
$KK^0\pi^0$	$0.14 \pm 0.03$	$0.5 \pm 0.5$	$0.5 \pm 0.5$	MC
$\omega\pi$	$0.21 \pm 0.01$	1.0	–0.2	MC ohne $3\pi\pi^0$
$\omega\pi\pi^0$	$0.046 \pm 0.007$	–0.25	1.0	ohne $3\pi 2\pi^0$
$\eta\pi\pi^0$	$0.17 \pm 0.03$	1.0	–0.24	MC
$X_{\text{strange}}$	$2.67 \pm 0.14$	–	–	

Tabelle 7.4: Verzweigungsverhältnisse für die hadronischen und leptonischen Zerfallsmodi des  $\tau$ -Leptons. Die Werte entsprechen den Resultaten einer globalen Anpassung an viele Einzelmessungen, die die Particle Data Group [1] durchgeführt hat. Die Gewichte der Kanäle für den Vektor- (Axialvektor)-Kanal sind ebenfalls angegeben. Spektren der Kanäle mit der Anmerkung „MC“ wurden der Simulation entnommen. Negative Gewichte dienen der Korrektur inklusive gemessener Beiträge in Spektren, die zu dem jeweils anderen Strom gehören.

wie die Endzustände mit drei Pionen zum Axialvektorstrom gehören. Tatsächlich können diese Endzustände sowohl zum Axialvektorstrom als auch zum Vektorstrom beitragen, da hier anders als z.B. im  $3\pi$ -Kanal die sogenannten „Wess-Zumino-Anomalien“ [68], die zur Kopplung eines Vektorzustands an einen pseudoskalaren Zustand führen, nicht unterdrückt sind. Die Aufteilung auf die beiden Ströme ist aber unbekannt und wird mit den zu  $-100\%$  korrelierten Gewichten  $w_V = 1 - w_A = 0.5 \pm 0.5$  in dieser Analyse berücksichtigt.

Bei der Klassifizierung der übrigen Zerfälle, die  $\omega$ - und  $\eta$ -Mesonen enthalten, ist eine weitere in der QCD erhaltene Quantenzahl hilfreich, die sogenannte „ $G$ -Parität“. Diese Quantenzahl ist definiert als der Eigenwert einer Kombination aus Ladungskonjugation  $C$  und einer Drehung  $R$  im Isospinraum, die das Vorzeichen der dritten Isospinkomponente ändert. Die  $G$ -Parität kann für Mesonen, die aus  $u$ - und  $d$ -Quarks bestehen und in einem Isospin-Multiplet zusammengefaßt sind, mit dem Eigenwert der Ladungskonjugation des neutralen Multiplet-Partners  $C$  und dem Isospin  $I$ , als  $G = (-1)^I C$  geschrieben werden. Wie die Parität ist auch die  $G$ -Parität eine multiplikative Quantenzahl. Im Standard-Modell kann nun der Vektorstrom nur an einen hadronischen Zustand mit positiver  $G$ -Parität koppeln und der Axialvektorstrom nur an solche mit negativer  $G$ -Parität. Ströme in denen eine Abweichung von dieser Regel erlaubt ist, nennt man „second class currents“ [69], sind aber bislang nicht beobachtet worden.

Im Endzustand  $\omega\pi$  koppeln die beiden Mesonen mit negativer  $G$ - und  $P$ -Parität zu einem  $G$ -

positiven Zustand. Nimmt man keinen zusätzlichen Drehimpuls zwischen den beiden Mesonen an, ist auch die Parität  $P = +1$ . Damit hätte man einen Axialvektorzustand (der Spin des  $\omega$ -Mesons ist  $J = 1$ ), der wegen der falschen  $G$ -Parität nicht an den Axialvektorstrom koppeln kann. Gibt es einen Drehimpuls  $L = 1$  zwischen den Mesonen, wird die Parität negativ, und es resultiert ein Vektorzustand mit positiver  $G$ -Parität, der an den Vektorstrom koppelt. Daher trägt das  $\omega\pi$ -System mit  $w_V = 1$  zum Vektorspektrum bei. Mit ähnlichen Argumenten findet man, daß der Endzustand  $\omega\pi\pi^0$  zum Axialvektorstrom ( $w_A = 1$ ) und  $\eta\pi\pi^0$  zum Vektorstrom ( $w_V = 1$ ) gehört.

Sowohl das  $\omega$ - als auch das  $\eta$ -Meson können elektromagnetisch zerfallen und die Isospinsymmetrie verletzen. Zerfällt das  $\omega$ -Meson z.B. in zwei statt in drei Pionen, wird im  $\omega\pi$ -Kanal der Endzustand  $3\pi$  erreicht. Der  $3\pi$ -Endzustand wird aber dem Axialvektorstrom zugeordnet, der damit fälschlich einen Anteil des Vektorzustandes  $\omega\pi$  enthält, der korrigiert werden muß. Die negativen Gewichte in Tabelle 7.4 berücksichtigen diese falsch zugeordneten Beiträge.

Für die  $\omega\pi\pi^0$ -Korrektur wird das entfaltete  $3\pi 2\pi^0$ -Spektrum benutzt, da  $\sim 71\%$  der Zerfälle mit diesem Endzustand aus dem  $\omega\pi\pi^0$ -Kanal stammen<sup>1</sup>. Die anderen Korrekturen sowie die Beimischung der Kanäle, die nicht aus den Daten rekonstruiert wurden, geschieht mit generierten Datensätzen und ist in der Tabelle durch die Anmerkung „MC“ gekennzeichnet. Die Fehler, die diesen Spektren zugeordnet werden, betragen  $\pm 100\%$ , um mögliche fehlerhafte Annahmen über die  $s$ -Verteilungen in diesen Kanälen zu berücksichtigen. Allerdings sind die Verzweigungsverhältnisse dieser Kanäle sehr klein, und der Anteil der Korrekturen bezogen auf die Verzweigungsverhältnisse der meßbaren Kanäle liegt unterhalb von  $2\%$ .

Die Spektralfunktionen für den Vektor- und Axialvektorstrom ergeben sich nun durch Umkehrung der Gleichung (2.27), unter Berücksichtigung der elektroschwachen Korrektur  $S_{EW}$  in Gleichung (2.80) zu:

$$\begin{aligned} v/a(s) &= 2\pi \operatorname{Im} \Pi_{V/A}^{(1)}(s) \\ &= m_\tau^2 \left[ 6S_{EW} |V_{ud}|^2 \left(1 - \frac{s}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + 2\frac{s}{m_\tau^2}\right) \right]^{-1} \\ &\quad \times \sum_{h_{V/A}} \frac{B(\tau \rightarrow h_{V/A} \nu_\tau) w_{V/A}}{B(\tau \rightarrow e \nu_e \nu_\tau) N_{V/A}} \frac{dN_{V/A}}{ds}, \end{aligned} \quad (7.7)$$

wobei die Summe über die hadronischen Endzustände  $h_{V/A}$  mit Drehimpuls  $J = 1$  läuft. Die Anzahl der Taus, die in ein Hadron  $h_{V/A}$  und ein Neutrino zerfallen, ist  $N_{V/A}$  und die entsprechenden entfalteten Spektren  $dN_{V/A}/ds$  sind in den Abbildungen 7.5 bis 7.7 dargestellt. Die Gewichte  $w_{V/A}$  jedes Kanals für den Vektor- und den Axialvektorstrom sowie die Verzweigungsverhältnisse  $B(\tau \rightarrow h_{V/A} \nu_\tau)$  sind in Tabelle 7.4 angegeben. Die Normierung ist hier so gewählt, daß im naiven Partonmodell für die Spektralfunktionen  $v_{\text{naiv}}(s) = a_{\text{naiv}}(s) = 1/2$  gilt.

Die Abbildung 7.9 zeigt die Spektralfunktion für den Vektorstrom, und in Abbildung 7.10 ist die Spektralfunktion für den Axialvektorstrom dargestellt. Beide Funktionen sind im Vergleich mit der naiven Erwartung und der masselosen, perturbativen QCD-Vorhersage

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \Pi_{V/A}^{(1)}(s) &= \frac{1}{4\pi} \left[ 1 + \frac{\alpha_s(s)}{\pi} + K_2 \frac{\alpha_s^2(s)}{\pi^2} + \left( K_3 - \frac{\beta_0^2}{48} \pi^2 \right) \frac{\alpha_s^3(s)}{\pi^3} \right. \\ &\quad \left. + \left( K_4 - \left( K_2 \beta_0^2 + \frac{5}{24} \beta_0 \beta_1 \right) \frac{\pi^2}{16} \right) \frac{\alpha_s^4(s)}{\pi^4} \right] + O(\alpha_s^5), \end{aligned} \quad (7.8)$$

<sup>1</sup> Diesen Wert erhält man, wenn man die Verzweigungsverhältnisse  $B(\tau \rightarrow \nu_\tau 3\pi 2\pi^0)$  und  $B(\tau \rightarrow \nu_\tau \omega \pi \pi^0 \rightarrow \nu_\tau 2\pi \pi^0 \pi \pi^0)$  [1] vergleicht.

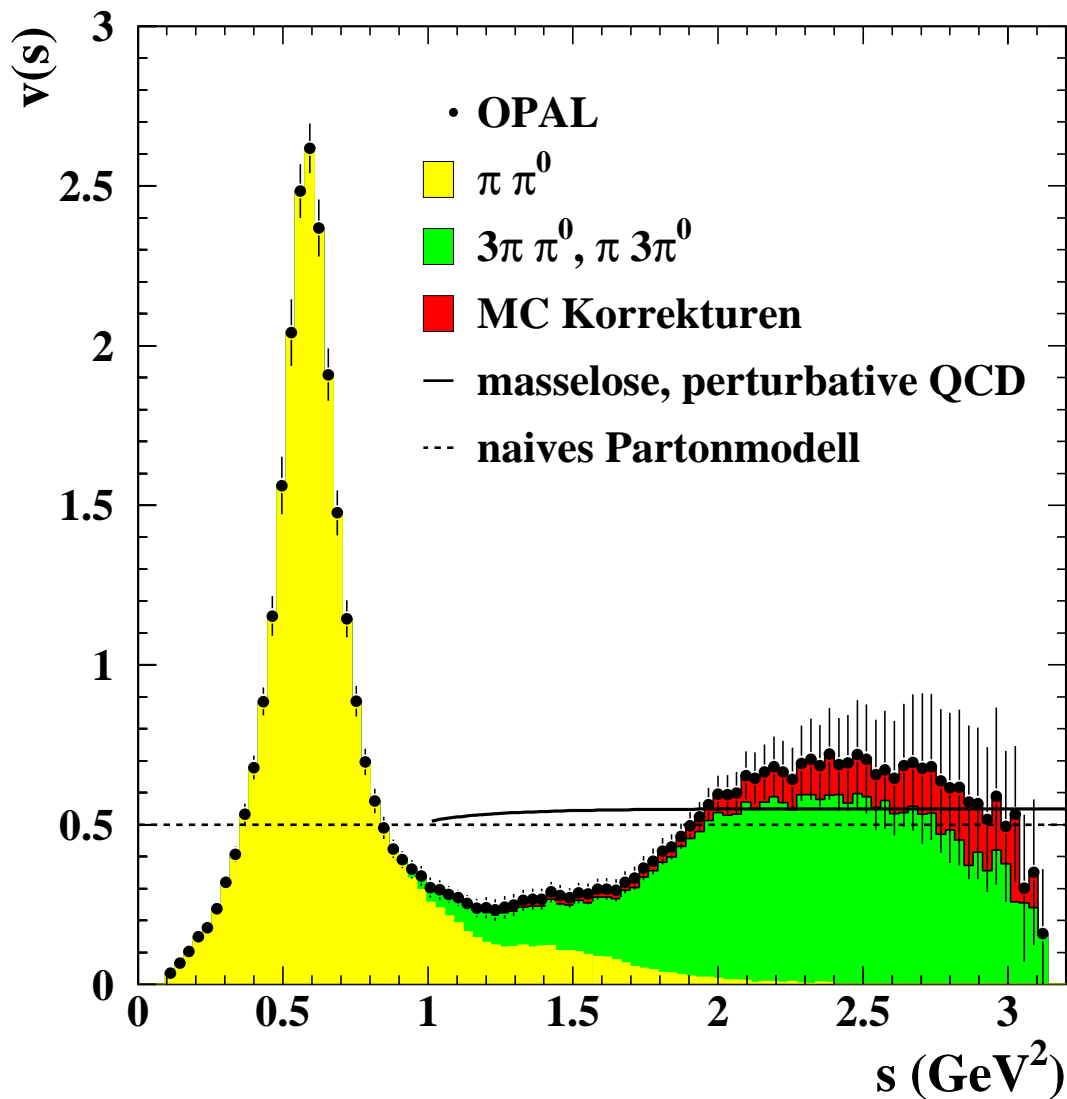


Abbildung 7.9: Die Spektralfunktion des Vektorstroms. Die Punkte zeigen die Summe aller beitragenden Kanäle. Einige exklusive Anteile sind durch schattierte Flächen gekennzeichnet. Die Erwartung im naiven Partonmodell entspricht der gestrichelten Linie, und die durchgezogene Linie zeigt die Vorhersage der masselosen, perturbativen QCD für  $\alpha_s(m_Z^2) = 0.122$ . Die Fehlerbalken enthalten statistische und systematische Unsicherheiten.

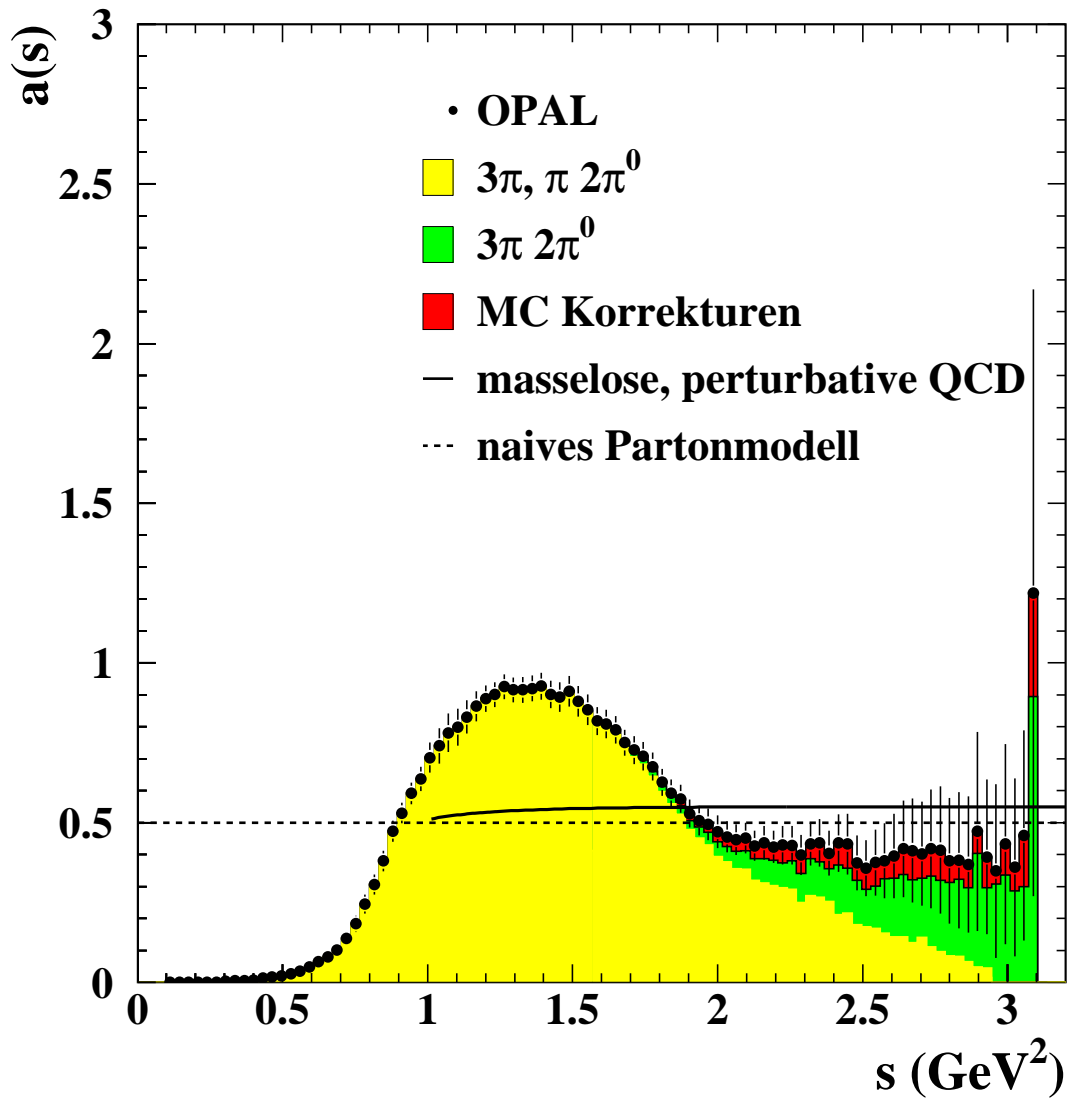


Abbildung 7.10: Die Spektralfunktion des Axialvektorstroms. Die Punkte zeigen die Summe aller beitragenden Kanäle. Einige exklusive Anteile sind durch schattierte Flächen gekennzeichnet. Die Erwartung im naiven Partonmodell entspricht der gestrichelten Linie, und die durchgezogene Linie zeigt die Vorhersage der masselosen, perturbativen QCD für  $\alpha_s(m_Z^2) = 0.122$ . Die Fehlerbalken enthalten statistische und systematische Unsicherheiten.

die aus der Integration von  $D(s)$  aus Gleichung (2.48) folgt und für  $\alpha_s(m_Z^2) = 0.122$  und  $K_4 = 25$  berechnet wurde, abgebildet. Unterhalb von  $s = 1 \text{ GeV}^2$  hängt die perturbative QCD-Vorhersage stark von der Wahl des Wertes für  $K_4$  ab und ist deshalb nur für größere  $s$ -Werte dargestellt.

Bei der Berechnung der Spektralfunktionen wird im wesentlichen der Phasenraum-Term  $(1 - s/m_\tau^2)^2$ , der die gemessenen und damit auch die entfalteten Spektren in der Nähe des kinematischen Endpunktes  $s = m_\tau^2$  unterdrückt, kompensiert. Dies führt zu großen Gewichtungsfaktoren für die Spektren in  $s$ -Regionen, die wenige Ereignisse enthalten. Die großen Fehler der Spektralfunktionen für  $s > 2 \text{ GeV}^2$  spiegeln die geringe Anzahl gemessener Ereignisse in diesem Bereich wieder.

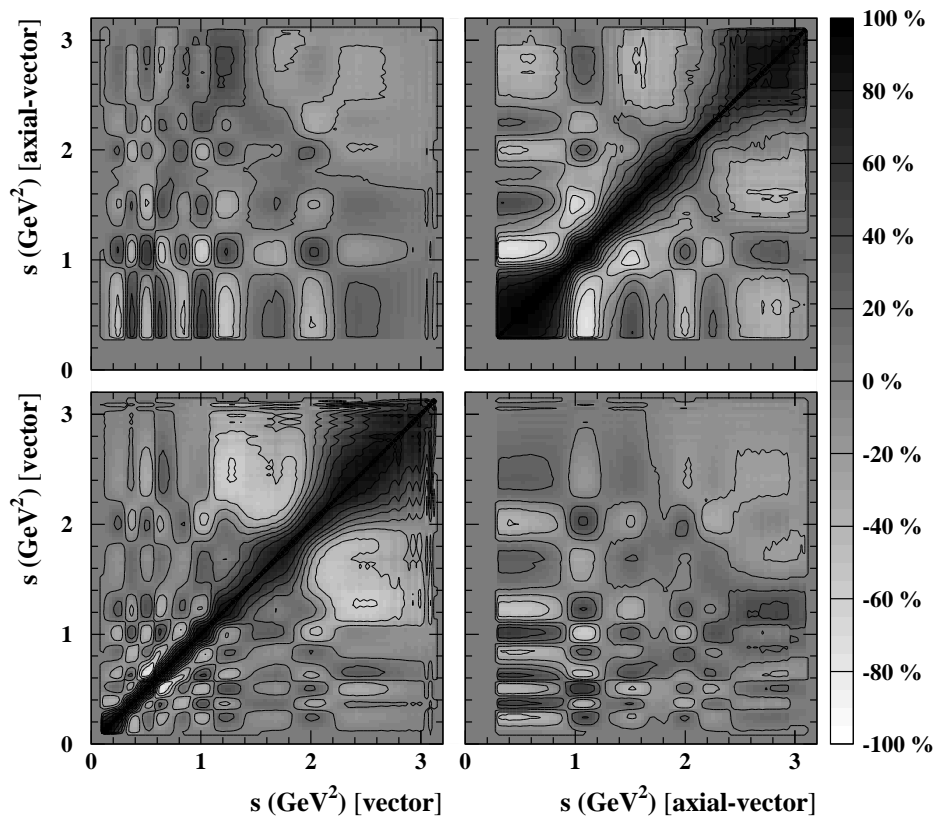


Abbildung 7.11: Die Korrelationsmatrix der Spektralfunktionen. Die Graustufen von Weiß =  $-100\%$  bis Schwarz =  $+100\%$  geben die Korrelationskoeffizienten zwischen den gemessenen Werten für die Spektralfunktionen  $v(s)$  und  $a(s)$  an. Die vier Untermatrizen geben die Korrelationen von  $v(s)$  zu  $v(s')$  (links unten),  $v(s)$  zu  $a(s')$  (rechts unten),  $a(s)$  zu  $a(s')$  (rechts oben) und  $a(s)$  zu  $v(s')$  (links oben) an. Äquidistante Konturlinien in Abständen von  $20\%$  sind ebenfalls eingezeichnet.

Wie in den entfalteten Spektren sind die Datenpunkte in den Spektralfunktionen starken Punkt-zu-Punkt-Korrelationen unterworfen, die in der Größenordnung  $+80\%$  ( $-50\%$ ) für Intervallabstände von  $0.1 \text{ GeV}^2$  ( $\approx 1 \text{ GeV}^2$ ) liegen. Aus der gemeinsamen Entfaltung der einspurigen (dreispurigen) Spektren, die sowohl zum Vektorstrom als auch zum Axialvektorstrom beitragen, resultieren auch Korrelationen zwischen dem Vektorspektrum und dem Axialvektorspektrum,



die von  $-60\%$  bis  $+60\%$  variieren. In Abbildung 7.11 ist die Korrelationsmatrix in Graustufen von Weiß für  $-100\%$ -ige Korrelation bis Schwarz für  $+100\%$ -ige Korrelation dargestellt.

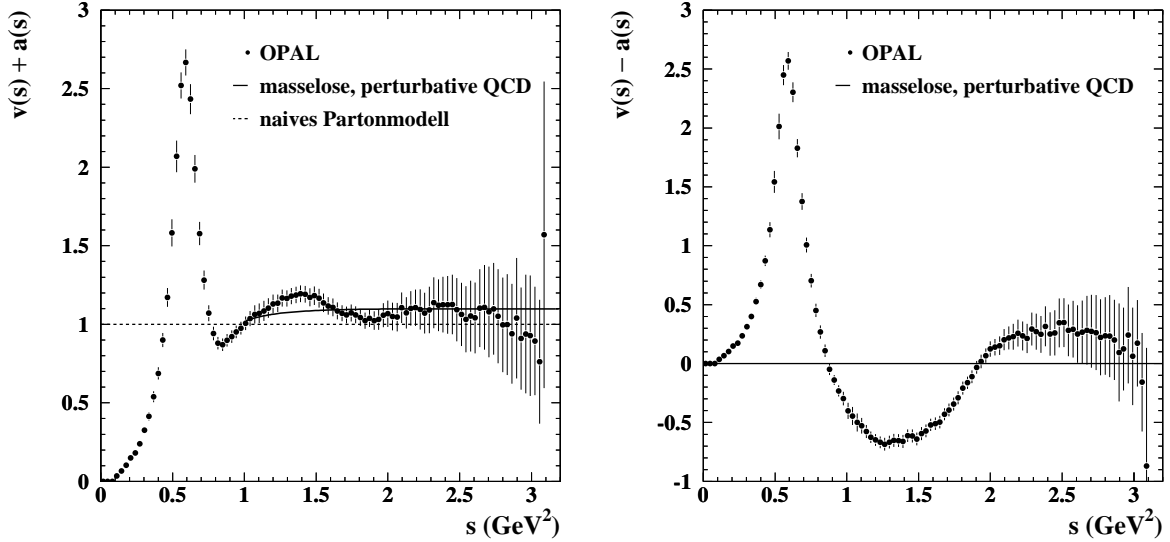


Abbildung 7.12: Die Summe  $v(s) + a(s)$  (links) und die Differenz  $v(s) - a(s)$  (rechts) der Vektor- und Axialvektor-Spektralfunktion. Die gestrichelte Linie zeigt die Erwartung im naiven Partonmodell, und die durchgezogene Linie gibt den Verlauf der masselosen, perturbativen QCD-Vorhersage wieder. Beide Erwartungen sind identisch Null für die Differenzfunktion  $v(s) - a(s)$ .

Weder die naive Erwartung noch der ausschließlich perturbative QCD-Ansatz, der etwa  $10\%$  größere Funktionswerte als der Partonmodell-Ansatz liefert, sind in der Lage, die stark resonante Form der Spektralfunktionen zu erklären. Wie in Kapitel 2 ausgeführt, ist das auch nicht zu erwarten, sondern erst die Berücksichtigung nicht-perturbativer Terme und die Integration über das Spektrum im Sinne der Momente von  $R_\tau$  ermöglicht einen Vergleich mit QCD-Rechnungen. Allerdings erwartet man bei hohen Energieskalen eine asymptotische Annäherung der Spektralfunktionen an die perturbative QCD-Vorhersage. Tatsächlich werden die Resonanzen mit zunehmender Masse breiter, und gleichzeitig steigt die Anzahl der beitragenden Resonanzen in den Regionen höherer Massen an. Addiert man die Vektor- und Axialvektor-Spektralfunktion, verdoppelt sich in etwa die Anzahl der Resonanzen und der Bereich asymptotischer Annäherung sollte schon bei kleineren Massen erreicht werden. In Abbildung 7.12 (links) ist die Summe der beiden Spektralfunktion dargestellt. Die perturbative QCD-Vorhersage liegt jetzt in einem weiten Bereich ( $s > 1.6 \text{ GeV}^2$ ) innerhalb der experimentellen Fehler.

Umgekehrt ist in Abbildung 7.12 (rechts), die die Differenz der beiden Spektralfunktionen zeigt, der rein nicht-perturbative Anteil in den Spektren dargestellt, da die Vorhersage der perturbativen QCD für die Differenzfunktion verschwindet. Der asymptotische Bereich, in dem die Differenzfunktion nicht mehr um Null oszilliert, ist bei  $m_\tau^2$  eindeutig noch nicht erreicht. Die Notwendigkeit nicht-perturbativer Korrekturen bei der Bestimmung von  $\alpha_s$  aus  $\tau$ -Zerfällen wird so gut sichtbar.

### 7.3 Momente von $R_\tau$

Die Momente von  $R_\tau$  ergeben sich aus Gleichung (2.54), indem  $dR_{\tau,V/A}(s)/ds$  aus der Summe der normierten, entfalteten Spektren und den schon bei den Spektralfunktionen angesprochenen Korrekturen mit generierten Verteilungen für die nicht-gemessenen Kanäle mit den Gewichten  $w_{V/A}$  aus Tabelle 7.4 gebildet wird.

$$R_{\tau,V/A}^{kl}(s_0) = \int_0^{s_0} ds \left(1 - \frac{s}{s_0}\right)^k \left(\frac{s}{m_\tau^2}\right)^l \sum_{h_{V/A}} \frac{B(\tau \rightarrow h_{V/A}\nu_\tau)}{B(\tau \rightarrow e\nu_e\nu_\tau)} \frac{w_{V/A}}{N_{V/A}} \frac{dN_{V/A}}{ds}, \quad (7.9)$$

wobei die Notation der aus Gleichung (7.7) entspricht, die Summe über die hadronischen Endzustände  $h_{V/A}$  aber über die Drehimpulse  $J = 0$  und  $J = 1$  läuft.

Moment $kl$	$R_V^{kl}$	Gesamtfehler	$R_A^{kl}$	Gesamtfehler
00	1.764	$\pm 0.016$	1.720	$\pm 0.017$
10	1.264	$\pm 0.012$	1.240	$\pm 0.013$
11	0.2980	$\pm 0.0034$	0.2510	$\pm 0.0032$
12	0.0942	$\pm 0.0019$	0.1090	$\pm 0.0019$
13	0.0403	$\pm 0.0016$	0.0518	$\pm 0.0013$

Tabelle 7.5: Die gemessenen Momente  $R_{V/A}^{kl}(m_\tau^2)$ , für  $kl = 00, 10, 11, 12, 13$ . Die angegebenen Fehler enthalten statistische und systematische Unsicherheiten.

$kl$	Daten-Stat.	Verzw.-Verh.	Systematische Fehler			
			Simul.-Stat.	$E$ -Kalib.	$p$ -Kalib.	Entfaltung
00	–	$\pm 0.016$	–	–	–	–
V 10	$\pm 0.005$	$\pm 0.010$	$\pm 0.004$	$\pm 0.004$	$\pm 0.001$	$\pm 0.001$
V 11	$\pm 0.0012$	$\pm 0.0031$	$\pm 0.0008$	$\pm 0.0005$	$\pm 0.0002$	$\pm 0.0000$
V 12	$\pm 0.0006$	$\pm 0.0016$	$\pm 0.0004$	$\pm 0.0007$	$\pm 0.0000$	$\pm 0.0001$
V 13	$\pm 0.0008$	$\pm 0.0011$	$\pm 0.0005$	$\pm 0.0005$	$\pm 0.0001$	$\pm 0.0001$
A 00	–	$\pm 0.017$	–	–	–	–
A 10	$\pm 0.004$	$\pm 0.012$	$\pm 0.002$	$\pm 0.002$	$\pm 0.002$	$\pm 0.003$
A 11	$\pm 0.0010$	$\pm 0.0029$	$\pm 0.0007$	$\pm 0.0003$	$\pm 0.0002$	$\pm 0.0004$
A 12	$\pm 0.0008$	$\pm 0.0015$	$\pm 0.0005$	$\pm 0.0006$	$\pm 0.0001$	$\pm 0.0005$
A 13	$\pm 0.0007$	$\pm 0.0008$	$\pm 0.0004$	$\pm 0.0004$	$\pm 0.0002$	$\pm 0.0003$

Tabelle 7.6: Statistische und systematisch Unsicherheiten der gemessenen Momente. Der obere (untere) Teil der Tabelle enthält die Ergebnisse für den Vektorstrom (Axialvektorstrom). Die Spalten enthalten den statistischen Fehler der Daten und die Unsicherheiten durch die Verzweungsverhältnisse, die begrenzte Anzahl simulierter Daten, die Energiekalibration, die Impulskalibration sowie durch die Entfaltung.

Die zehn Momente für den Vektor- (V) und Axialvektorstrom (A) sind für die Potenzen  $kl = 00, 10, 11, 12, 13$  und unter Ausnutzung des gesamten kinematischen Bereiches ( $s_0 = m_\tau^2$ ) in Tabelle 7.5 angegeben. Dabei ergeben sich die Momente zu den Indizes  $kl = 00$  allein aus den Verzweungsverhältnissen (siehe Tabelle 7.4) und stellen keine OPAL-Messung dar. Die Beiträge zu den Fehlern der Momente sind in Tabelle 7.6 aufgeschlüsselt und die Korrelationen

V	00	10	11	12	A \ V	00	10	11	12	13	A	00	10	11	12
10	72				00	2	9	0	-8	-8	10	85			
11	87	72			10	9	4	0	4	8	11	79	56		
12	74	14	72		11	-5	-2	-7	-7	-4	12	64	22	85	
13	53	-18	37	90	12	-8	3	0	-12	-17	13	51	2	63	94
					13	-10	8	3	-16	-26					

Tabelle 7.7: Korrelationen zwischen den gemessenen Momenten  $R_{V/A}^{kl}(m_\tau^2)$  in Prozent. Die linke (rechte) Tabelle gibt die Korrelationen zwischen den Momenten des Vektorstroms (Axialvektorstroms) an. Die Tabelle in der Mitte enthält die Korrelationen zwischen den Momenten verschiedener Ströme.

zwischen den Momenten kann man Tabelle 7.7 entnehmen. Je stärker die Modifizierung der Spektren durch die Gewichtungspolynome zu den Indizes  $kl$  ist, um so stärker hängen die Fehler der entsprechenden Momente von den statistischen Fehlern der Daten ab. Der dominante Beitrag zum Fehler stammt aber bei allen Momenten aus der Unsicherheit der Verzweungsverhältnisse. Die systematischen Fehler sind dagegen quadratisch klein gegen den statistischen Fehler, der sich aus den statistischen Fehlern der Daten und den Unsicherheiten der Verzweungsverhältnisse ergibt. Die Korrelationen zwischen „benachbarten“ Momenten eines Stroms, die sich nur um Eins in einem der beiden Indizes  $kl$  unterscheiden, sind positiv und liegen zwischen 56 % und 94 %. Das Moment mit  $kl = 00$  ist für beide Ströme zwischen 51 % und 87 % zu den anderen Momenten desselben Stroms korreliert, da hier die Korrelationen ausschließlich durch die Verzweungsverhältnisse bestimmt werden. Die übrigen Korrelationen liegen zwischen -26 % und maximal 63 %, wobei Momente aus verschiedenen Strömen nahezu unabhängig voneinander sind.

#### 7.4 Messung der starken Kopplungskonstanten $\alpha_s(m_\tau^2)$

Da die (masselosen) perturbativen Entwicklungen für Vektor- und Axialvektorstrom identisch sind, während sich die Massenkorekturen und die nicht-perturbativen Anteile unterscheiden, werden zwei verschiedene Anpassungen für die Extraktion der starken Kopplungskonstanten  $\alpha_s$  einerseits und den nicht-perturbativen QCD-Parametern andererseits durchgeführt. Die Summen  $R_{\tau,V}^{kl}(m_\tau^2) + R_{\tau,A}^{kl}(m_\tau^2)$  der Momente für die beiden Ströme sind im wesentlichen sensitiv auf perturbative QCD und werden daher für die Messung von  $\alpha_s$  (Anpassung 1) benutzt, die im folgenden beschrieben wird, während die exklusiven Momente beider Ströme zur Bestimmung des Gluonkondensats und der nicht-perturbativen Korrekturen  $\delta_{V/A}^{6,8}$  dienen (Anpassung 2). Diese Anpassung wird in Abschnitt 7.6 präsentiert.

Zusätzlich zu den Momenten, die in Tabelle 7.5 angegeben sind, können die Messung der Lebensdauer des  $\tau$ -Leptons  $\tau_\tau$  und das Verzweungsverhältnis  $B_\mu = B(\tau \rightarrow \mu\nu_\mu\nu_\tau)$  in Anpassung 1 benutzt werden, da aus beiden Größen die totale hadronische Zerfallsrate des  $\tau$ -Leptons bestimmt werden kann:

$$R_\tau(\tau_\tau) = \frac{1}{\Gamma_e} \frac{1}{\tau_\tau} - 1 - \frac{\Gamma_\mu}{\Gamma_e}, \quad (7.10)$$

$$R_\tau(B_\mu) = \frac{\Gamma_\mu}{\Gamma_e} \frac{1}{B_\mu} - 1 - \frac{\Gamma_\mu}{\Gamma_e}. \quad (7.11)$$

In beiden Fällen wird Lepton-Universalität angenommen, so daß die folgende Gleichung gilt:

$$B_\mu = B_e \frac{\Gamma_\mu}{\Gamma_e}, \quad (7.12)$$

mit  $\frac{\Gamma_\mu}{\Gamma_e} = 0.9726$  [34] und  $\Gamma_e = 4.0329 \cdot 10^{-13} \text{ GeV}$  [34, 70]. Die nicht-seltene Zerfallsrate  $R_{\tau,V} + R_{\tau,A}$  erhält man, wenn man  $R_{\tau,s} = B_s/B_e = 0.150 \pm 0.008$  [1] vom gewichteten Mittel  $R_\tau(B_\mu, \tau_\tau)$  aus  $R_\tau(\tau_\tau)$  und  $R_\tau(B_\mu)$  subtrahiert<sup>2</sup>.

Prinzipiell ist es auch möglich, mit dem Verzweigungsverhältnis  $B_e$  des  $\tau$ -Leptons in ein Elektron und Neutrinos die totale Zerfallsrate  $R_\tau$  zu berechnen. In den Größen  $R_{\tau,V/A}$  aus den hadronischen Verzweigungsverhältnissen wird aber  $B_e$  bereits für die Normierung eingesetzt, und die Korrelation der Zerfallsrate  $R_\tau(B_e)$  aus  $B_e$  zu  $R_{\tau,V} + R_{\tau,A}$  beträgt 96 %, wenn man die Korrelationen der Verzweigungsverhältnisse, die unter der Zwangsbedingung, daß sich die Summe aller Verzweigungsverhältnisse zu Eins addieren muß, bestimmt worden sind [1], berücksichtigt.

Aus den Weltmittelwerten  $\tau_\tau = (291.0 \pm 1.5) \text{ fs}$  und dem angepaßten Wert  $B_\mu = 0.1735 \pm 0.0010$  [1] erhält man:

$$R_\tau(B_\mu, \tau_\tau) - R_{\tau,s} = 3.485 \pm 0.023. \quad (7.13)$$

Aus den Verzweigungsverhältnissen des  $\tau$ -Leptons in Vektor- und Axialvektorzustände in Tabelle 7.4 bzw. den beiden Momenten mit den Indizes  $kl = 00$  in Tabelle 7.5 ergibt sich der folgende Wert:

$$R_{\tau,V} + R_{\tau,A} = 3.484 \pm 0.024. \quad (7.14)$$

Beide Werte stimmen ungewöhnlich gut überein und sind bei einem Korrelationskoeffizienten von 24 % fast unabhängig. Das gewichtete Mittel beider Werte wird in Anpassung 1 verwendet.

In der Anpassung 1 werden vier Parameter benutzt, um fünf Momente zu beschreiben, so daß ein Freiheitsgrad für die Anpassung verbleibt. Die vier Parameter sind: Die starke Kopplungskonstante  $\alpha_s(m_\tau^2)$ , das Gluon-Kondensat  $\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle$  und die 6- bzw. 8-dimensionalen Korrekturen  $\delta_{V+A}^6$  und  $\delta_{V+A}^8$  für das Moment mit  $kl = 00$ .

Anpassung 2 benötigt sechs Parameter für zehn Momente (vier Freiheitsgrade):  $\alpha_s(m_\tau^2)$ ,  $\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle$  sowie die nicht-perturbativen Korrekturen  $\delta_V^6$ ,  $\delta_V^8$ ,  $\delta_A^6$  und  $\delta_A^8$ . Die nicht-perturbativen Korrekturen beider Anpassungen können wie folgt verglichen werden:

$$\delta_{V+A}^D = \frac{1}{2} (\delta_V^D + \delta_A^D). \quad (7.15)$$

Um die Konsistenz der Methode zu überprüfen, ist es außerdem sinnvoll, getrennte Anpassungen der fünf Momente des Vektorstroms sowie der fünf Momente des Axialvektorstroms durchzuführen und die beiden in den Anpassungen 1 und 2 als universell angenommenen Größen  $\alpha_s$  und  $\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle$  getrennt für beide Ströme zu bestimmen. Dieser Vergleich wird in Abschnitt 7.6 im Anschluß an die Resultate der Anpassung 2 diskutiert.

In allen Anpassungen werden außerdem die Massen der drei leichten Quarks  $m_{u,d,s}$ ,

$$m_u = (8.7 \pm 1.5) \text{ MeV}, \quad m_d = (15.4 \pm 1.5) \text{ MeV}, \quad m_s = (270 \pm 30) \text{ MeV}, \quad (7.16)$$

und die Quark-Kondensate  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{u,d,s} = -\mu_{u,d,s}^3$ , mit

$$\mu_u = \mu_d = (189 \pm 7) \text{ MeV}, \quad \mu_s = (160 \pm 10) \text{ MeV}, \quad (7.17)$$

für die Berechnung der Massenkorrekturen und die Vervollständigung des 4-dimensionalen Korrekturterms  $\delta_{V/A}^{4,kl}$  benötigt. Diese Werte stammen aus [5]. Die Massenkorrekturen sind allerdings fast vernachlässigbar klein für die nicht-seltene Zerfälle des  $\tau$ -Leptons.

<sup>2</sup>  $R_{\tau,s}$  wird von  $R_\tau$  abgezogen, da die induzierte Unsicherheit durch die Masse des s-Quarks größere Fehler in der Anpassung lieferte, wenn man statt dessen  $R_\tau$  benutzte.

Theorie	Observable	Wert	Beitragende Fehler				$\chi^2/\text{d.o.f.}$
			Daten	$B$	Syst.	Theo.	
CIPT	$\alpha_s(m_\tau^2)$	0.348	$\pm 0.002$	$\pm 0.009$	$\pm 0.002$	$\pm 0.019$	0.16/1
	$\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle / \text{GeV}^4$	-0.003	$\pm 0.007$	$\pm 0.007$	$\pm 0.006$	$\pm 0.005$	
	$\delta_{V+A}^6$	0.0012	$\pm 0.0034$	$\pm 0.0033$	$\pm 0.0029$	$\pm 0.0006$	
	$\delta_{V+A}^8$	-0.0010	$\pm 0.0024$	$\pm 0.0016$	$\pm 0.0015$	$\pm 0.0003$	
FOPT	$\alpha_s(m_\tau^2)$	0.324	$\pm 0.001$	$\pm 0.006$	$\pm 0.002$	$\pm 0.013$	0.17/1
	$\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle / \text{GeV}^4$	0.014	$\pm 0.007$	$\pm 0.006$	$\pm 0.005$	$\pm 0.013$	
	$\delta_{V+A}^6$	0.0028	$\pm 0.0034$	$\pm 0.0034$	$\pm 0.0030$	$\pm 0.0068$	
	$\delta_{V+A}^8$	-0.0015	$\pm 0.0024$	$\pm 0.0016$	$\pm 0.0014$	$\pm 0.0019$	
RCPT	$\alpha_s(m_\tau^2)$	0.306	$\pm 0.001$	$\pm 0.005$	$\pm 0.001$	$\pm 0.011$	0.07/1
	$\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle / \text{GeV}^4$	-0.002	$\pm 0.007$	$\pm 0.007$	$\pm 0.005$	$\pm 0.002$	
	$\delta_{V+A}^6$	-0.0047	$\pm 0.0036$	$\pm 0.0040$	$\pm 0.0032$	$\pm 0.0011$	
	$\delta_{V+A}^8$	-0.0001	$\pm 0.0024$	$\pm 0.0017$	$\pm 0.0015$	$\pm 0.0003$	

Tabelle 7.8: Das Resultat für  $\alpha_s(m_\tau^2)$  und die nicht-perturbativen Parameter aus der Anpassung 1 an die Summen der Vektor- und Axialvektor-Momente. Die angegebenen Werte beziehen sich auf die drei verschiedenen Theorien, die den perturbativen Anteil der Momente beschreiben. Die zitierten Fehler entsprechen den statistischen Fluktuationen der Daten, den Fehlern der Verzweigungsverhältnisse  $B$ , einem systematischen Fehler durch die Simulation, die Energie- und Impuls-Kalibration und die Entfaltung sowie einem Gesamtfehler aus den theoretischen Fehlerquellen.

Die Fehlermatrix der Momente wird aus den experimentellen Fehlern der Momente und ihren Korrelationen (Tabellen 7.5 und 7.7) sowie einer „theoretischen“ Fehlermatrix, die aus den Fehlern der Quark-Massen und -Kondensate bestimmt werden kann, berechnet.

Die Ergebnisse der Anpassung an die Summen der Vektor- und Axialvektor-Momente sind in Tabelle 7.8 zusammengefaßt. Die zitierten Fehler setzen sich aus den statistischen Fehlern der Daten, den Unsicherheiten durch die Verzweigungsverhältnisse, einem experimentellen, systematischen Fehler, der die statistischen Fehler der simulierten Datensätze und Unsicherheiten durch die Entfaltung berücksichtigt, sowie einem theoretischen Fehler, in den die Unsicherheiten der Quark-Massen und -Kondensate, die Variation des  $O(\alpha_s^4)$ -Koeffizienten  $K_4$ , und die Abhängigkeiten vom Renormierungsschema und von der Renormierungsskala eingehen, zusammen. Die starke Kopplungskonstante wird dabei hauptsächlich durch das  $kl = 00$ -Moment festgelegt, so daß sich der dominante experimentelle Fehlerbeitrag für  $\alpha_s$  aus den Unsicherheiten der Verzweigungsverhältnisse ergibt.

Alle drei Theorien führen zu ähnlichen  $\chi^2$ -Werten (siehe Tabelle 7.8), während die Streuung der Resultate der Anpassung für  $\alpha_s(m_\tau^2)$  den Gesamtfehler um etwa das Doppelte überschreitet. Eine ähnlich große Streuung der Werte für  $\alpha_s(m_\tau^2)$  aus den drei Modellen ist in [71, 72] beobachtet worden, deren Autoren, übereinstimmend mit diesem Ergebnis, für RCPT den kleinsten und für CIPT den größten  $\alpha_s$ -Wert angeben. Die Streuung der drei  $\alpha_s$ -Werte muß man als zusätzliche theoretische Unsicherheit interpretieren, wenn keine der drei Theorien a priori ausgeschlossen werden kann.

Die Unterschiede in den statistischen und systematischen Fehlern von  $\alpha_s$  entsprechen den erwarteten Änderungen des relativen Fehlers von  $\alpha_s$ , der proportional zu  $\alpha_s$  selbst ist, und sind deshalb in guter Übereinstimmung für die drei Theorien. Für die theoretischen Unsicherheiten sollte man dasselbe Verhalten erwarten. Tatsächlich enthalten aber nur die Anpassungen mit FOPT und CIPT die Unsicherheit des unbekanntes  $K_4$ -Koeffizienten im theoretischen Fehler und können daher nicht in dieser Hinsicht mit dem RCPT-Resultat verglichen werden. Außerdem verschwindet der Einfluß der Variation des Renormierungsschemas in der RCPT-Anpassung.

Die Auswirkungen der verschiedenen theoretischen Fehlerquellen auf  $\alpha_s$  sind in Tabelle 7.9 angegeben. Die dort zitierten Werte entsprechen der Streuung von  $\alpha_s$  in Anpassung 1, durch die Variation der unbekanntes  $O(\alpha_s^4)$  Abhängigkeit  $K_4 = 25 \pm 50$ , die Wahl der Renormierungsskala  $0.4 \leq \mu^2/m_\tau^2 \leq 2.0$ , die Variation des Renormierungsschemas mit dem dritten Koeffizienten der  $\beta$ -Funktion  $0.0 \leq \beta_2^{\text{RS}}/\beta_2^{\overline{\text{MS}}} \leq 2.0$  und durch Unsicherheiten in der Extrapolation des Wertes  $\alpha_s(m_\tau^2)$  von der  $\tau$ - zur  $Z^0$ -Masse.

Fehlerquelle	$\Delta\alpha_s(m_\tau^2)$			$\Delta\alpha_s(m_Z^2)$		
	CIPT	FOPT	RCPT	CIPT	FOPT	RCPT
$-25 \leq K_4 \leq 75$	$\pm 0.012$	$\pm 0.006$	–	$\pm 0.0013$	$\pm 0.0007$	–
$0.4 \leq \mu^2/m_\tau^2 \leq 2.0$	$\pm 0.006$	$\pm 0.009$	$\pm 0.011$	$\pm 0.0005$	$\pm 0.0009$	$\pm 0.0015$
$0.0 \leq \beta_2^{\text{RS}}/\beta_2^{\overline{\text{MS}}} \leq 2.0$	$\pm 0.015$	$\pm 0.009$	$\pm 0.000$	$\pm 0.0009$	$\pm 0.0005$	$\pm 0.0005$
Extrapolation	–	–	–	$\pm 0.0003$	$\pm 0.0003$	$\pm 0.0003$

Tabelle 7.9: *Theoretische Unsicherheiten der starken Kopplungskonstanten. Die Fehler entsprechen der vollen Streuung des resultierenden  $\alpha_s$ -Wertes in Anpassung 1 bei der Variation der in der ersten Spalte beschriebenen Parameter.*

Obwohl die theoretischen Gesamtfehler von  $\alpha_s$  für alle drei Theorien kompatibel sind, besteht ein beachtlicher Unterschied zwischen FOPT und den beiden anderen Theorien: Die FOPT-Anpassung führt zu einer signifikant stärkeren Abhängigkeit der nicht-perturbativen Parameter  $\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle$  und  $\delta_{V+A}^{6/8}$  von den theoretischen Unsicherheiten als die Anpassungen mit CIPT und RCPT. Der wesentliche Effekt kommt hier durch die Variation der Renormierungsskala  $\mu^2$  zustande. Die statistischen und systematischen Unsicherheiten der OPE-Korrekturen sind erwartungsgemäß in allen drei Fällen ähnlich.

Die Güte der Anpassungen für die drei Theorien kann man überprüfen, indem man die obere Integrationsgrenze von  $R_{\tau,V}(s_0) + R_{\tau,A}(s_0)$  von  $s_0 = m_\tau^2$  auf kleinere Werte für  $s_0$  ändert und die mit den Parametern  $\alpha_s(m_\tau^2)$ ,  $\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle$  und  $\delta_{V+A}^{6/8}$  berechneten theoretischen Vorhersagen in diesem Bereich mit den integrierten Daten vergleicht. In Abbildung 7.13 ist dieser Vergleich dargestellt, wobei die Parameter für die theoretischen Vorhersagen jeweils aus der Anpassung an die fünf Momente bei  $s_0 = m_\tau^2$  entnommen sind. Die CIPT-Vorhersage ist von der  $\tau$ -Massenskala abwärts bis zu  $s_0 \approx 1 \text{ GeV}^2$  in guter Übereinstimmung mit den Daten, während FOPT und RCPT unterhalb von  $s_0 \approx 2 \text{ GeV}^2$  zu größeren Werten tendieren. Unterhalb von  $s_0 \approx 1 \text{ GeV}^2$  werden die Daten von keiner der drei Theorien beschrieben, da hier die Einflüsse der Resonanzen in den Spektralfunktionen auch im Integral dominant werden. Die Unsicherheiten der drei Theorien sind dabei dominant durch den Fehler von  $\alpha_s(m_\tau^2)$  gegeben, während auch bei niedrigen  $s_0$  die nicht-perturbativen Terme nur einen geringen Einfluß auf die Vorhersagen haben. Setzt man die Gültigkeit der OPE auch für  $s_0 < m_\tau^2$  voraus, kann man aus diesem Vergleich schließen, daß die perturbative Beschreibung mit CIPT den anderen beiden vorzuziehen ist.

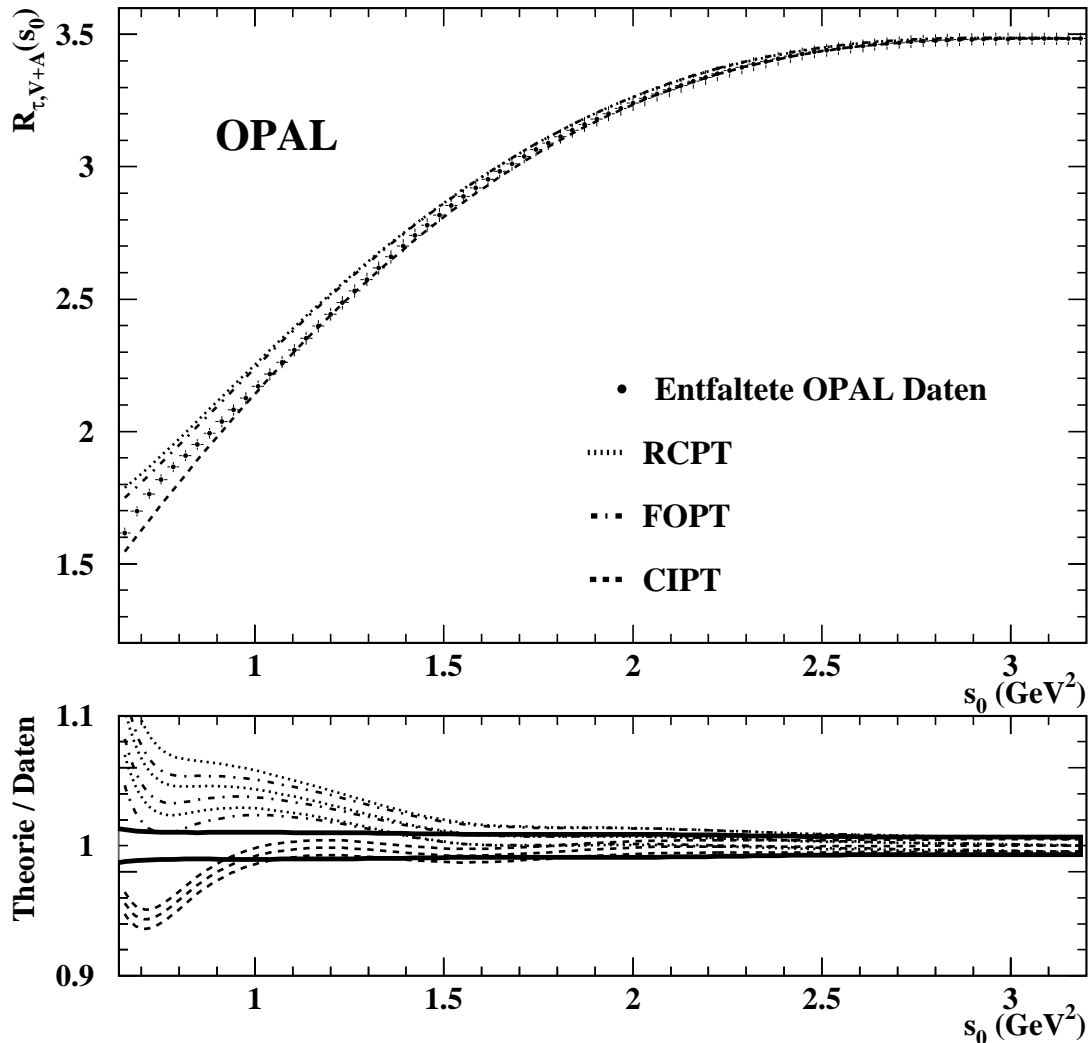


Abbildung 7.13: Die nicht-seltene, hadronische Zerfallsrate  $R_{\tau,V}(s_0) + R_{\tau,A}(s_0)$  des  $\tau$ -Leptons als Funktion der oberen Integrationsgrenze  $s_0$ . Die Punkte im oberen Bild entsprechen OPAL-Daten. Die gestrichelte, gestrichpunktete und gepunktete Kurve geben die Vorhersagen der Theorien CIPT, FOPT und RCPT wieder, wobei die Resultate der Anpassungen bei  $s_0 = m_\tau^2$  für die Vorhersagen benutzt wurden. Das untere Bild zeigt die Verhältnisse der drei Theorien normiert auf die Daten. Die drei Sätze gestrichelter, gestrichpunkteter und gepunkteter Kurven geben jeweils die Zentralwerte und den experimentellen Gesamtfehler für je eine der drei Theorien an. Die durchgezogenen Kurven zeigen den Fehler der Daten, inklusive aller statistischen und systematischen Unsicherheiten.

### 7.4.1 Extrapolation von $\alpha_s$ von der $\tau$ -Masse zur $Z^0$ -Masse

Der Wert der starken Kopplungskonstanten bei der  $\tau$ -Massenskala kann bis zur  $Z^0$ -Masse extrapoliert werden, indem die Vier-Schleifen- $\beta$ -Funktion (2.39) mit einem Runge-Kutta-Verfahren, das bereits für die Lösung der  $\alpha_s$  Werte auf dem Kreis  $|s| = m_\tau^2$  in der komplexen Ebene benutzt worden ist, in kleinen Schritten von  $m_\tau^2$  bis  $m_Z^2$  numerisch gelöst wird. Der Wert von  $\alpha_s$  bei der  $\tau$ -Masse entspricht einer effektiven QCD mit nur drei Quarksorten, nämlich den drei leichtesten Quarks  $u$ ,  $d$  und  $s$ . Bei der  $Z^0$ -Masse sind aber auch das  $c$ - und das  $b$ -Quark verfügbar, und die  $\beta$ -Funktion muß, da ihre Koeffizienten von der Anzahl  $n_f$  der Quarksorten abhängen, entsprechend angepaßt werden. Die Schwellenwerte, ab denen eine neue Quarksorte berücksichtigt werden muß, ergeben sich aus den Massen der hinzukommenden Quarks. Den  $\alpha_s$ -Wert für  $n_f$  Quarks, der auch einer effektiven QCD mit  $n_f$  Quarksorten entspricht, kann man an der Schwelle aus dem  $\alpha_s$ -Wert für  $n_f - 1$  Quarks einer effektiven QCD mit  $n_f - 1$  Quarksorten bestimmen [73]:

$$\alpha_s(\mu_q^2)_{n_f} = \alpha_s(\mu_q^2)_{n_f-1} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k(x) \frac{\alpha_s^k(\mu_q^2)_{n_f-1}}{\pi^k} \right], \quad (7.18)$$

wobei  $x = \ln(\mu_q^2/m_q^2)$  den Logarithmus des Verhältnisses der gewählten Schwelle  $\mu_q^2$  für den Übergang von einer effektiven Theorie mit  $n_f - 1$  Quarks zu einer Theorie mit  $n_f$  Quarks und dem Quadrat der Masse  $m_q$  des neu hinzukommenden Quarks angibt. Die Koeffizienten  $C_k(x)$  sind für  $k = 1, \dots, 3$  in [73] angegeben. Damit die Wahl der Schwelle  $\mu^2$  den Massenparameter  $m_q$  nicht ändert (auch die Quarkmassen sind wie  $\alpha_s$  stark skalenabhängig), sind die Koeffizienten  $C_k(x)$  in [73] für invariante Massenparameter  $m_q = \bar{m}_q(\bar{m}_q)$  im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema berechnet worden. Für die beiden neu hinzukommenden Quarks lauten sie  $\bar{m}_c(\bar{m}_c) = (1.30 \pm 0.06)\text{GeV}$  und  $\bar{m}_b(\bar{m}_b) = (4.13 \pm 0.06)\text{GeV}$  [73]. Der Zentralwert für  $\alpha_s(m_Z^2)$  wird nun durch folgende Prozedur bestimmt:

- $\alpha_s(m_\tau^2)_3 \rightarrow \alpha_s(m_\tau^2)_4$  mit der Quarkmasse  $m_c = \bar{m}_c(\bar{m}_c)$ .
- $\alpha_s(m_\tau^2)_4 \rightarrow \alpha_s(m_b^2)_4$  mit der Runge-Kutta-Methode und für  $n_f = 4$ .
- $\alpha_s(m_b^2)_4 \rightarrow \alpha_s(m_b^2)_5$  mit der Quarkmasse  $m_b = \bar{m}_b(\bar{m}_b)$ .
- $\alpha_s(m_b^2)_5 \rightarrow \alpha_s(m_Z^2)_5$  mit der Runge-Kutta-Methode und für  $n_f = 5$ .

Die Variation der Schwellen zwischen der einfachen und der doppelten Masse des hinzukommenden Quarks sowie die Fehler der Massen selbst induzieren einen zusätzlichen Fehler in der Größe  $\Delta_{\text{evol}} = \pm 0.0003$  auf  $\alpha_s(m_Z^2)$ , in Übereinstimmung mit dem in [73] angegebenen Fehler. Mit dem CIPT-Ergebnis für  $\alpha_s(m_\tau^2)$  und  $m_Z = 91.187\text{GeV}$  erhält man

$$\alpha_s(m_Z^2) = 0.1219 \pm 0.0010_{\text{exp}} \pm 0.0017_{\text{theo}} \pm 0.0003_{\text{evol}}. \quad (7.19)$$

Der FOPT-Wert liefert

$$\alpha_s(m_Z^2) = 0.1191 \pm 0.0008_{\text{exp}} \pm 0.0013_{\text{theo}} \pm 0.0003_{\text{evol}}. \quad (7.20)$$

Für RCPT schließlich ergibt sich

$$\alpha_s(m_Z^2) = 0.1169 \pm 0.0007_{\text{exp}} \pm 0.0015_{\text{theo}} \pm 0.0003_{\text{evol}}. \quad (7.21)$$

Die hier beitragenden Fehlerquellen sind in Tabelle 7.9 aufgeschlüsselt. Alle drei Resultate sind in guter Übereinstimmung mit dem Wert, der aus der Kombination verschiedener Messungen aus dem elektroschwachen Sektor bei LEP und SLD nach einer globalen Anpassung von Parametern des Standard-Modells an die kombinierten Messungen resultiert [74]:

$$\alpha_s(m_Z^2) = 0.120 \pm 0.003. \quad (7.22)$$



## 7.5 Das „Laufen“ der starken Kopplung

Die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Extrapolation eines Meßwertes für  $\alpha_s(s)$ , der an einer bestimmten Stelle  $s$  gemessen worden ist, zu einem Wert  $\alpha_s(s')$  an einer anderen Stelle  $s'$ , ist in jedem Experiment, das die starke Kopplungskonstante an einer bestimmten Skala mißt, möglich. Im  $\tau$ -Zerfall bietet sich darüber hinaus die Möglichkeit, die starke Kopplungskonstante auch unterhalb der  $\tau$ -Massenskala zu messen und das „Laufen“ der starken Kopplungskonstanten in einem einzigen Experiment zu testen. Dieser Test wird im folgenden beschrieben.

Die Anpassung an die Summen der Vektor- und Axialvektormomente, die für  $s_0 = m_\tau^2$  bestimmt wurden, (Anpassung 1) kann auf Momente bei kleineren Werten von  $s_0$  ausgedehnt werden, so daß eine korrelierte Messung der starken Kopplungskonstanten an verschiedenen Skalen resultiert. Die Anpassung ist auf vier äquidistante  $s_0$ -Werte zwischen  $1.3 \text{ GeV}^2$  und  $m_\tau^2$  erweitert worden, wobei für jedes  $s_0 < m_\tau^2$  die integrierte, differentielle Zerfallsrate  $R_{\tau,V}^{00}(s_0) + R_{\tau,A}^{00}(s_0)$  mit in die Anpassung aufgenommen worden ist (siehe Abbildung 7.13). Gleichzeitig ist der Parametersatz um die drei Werte der starken Kopplung bei diesen Skalen  $s_0 < m_\tau^2$  ergänzt worden. Das Ergebnis kann mit der Vier-Schleifen- $\beta$ -Funktion untersucht werden.

Abbildung 7.14 zeigt einen Vergleich der vier  $\alpha_s$ -Werte für jede der drei Theorien mit einer Anpassung der  $\beta$ -Funktion an die gemessenen Werte. In der Anpassung der  $\beta$ -Funktion wird  $\alpha_s(m_\tau^2)$  jeweils neu bestimmt, ohne den Werte der starken Kopplung bei  $s_0 = 1.3 \text{ GeV}^2$  zu berücksichtigen, da FOPT und RCPT eine flachere Form der  $\beta$ -Funktion bevorzugen und bei der Anpassung aller vier Meßwerte unverträglich mit der  $\beta$ -Funktion sind. Für CIPT ist die Übereinstimmung mit der  $\beta$ -Funktion dagegen sehr gut.

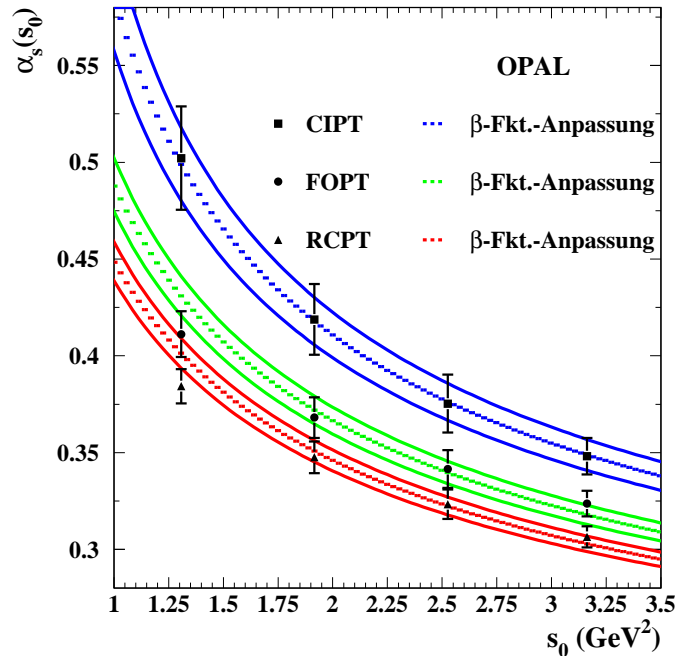


Abbildung 7.14: Das Laufen der starken Kopplungskonstanten. Die drei Messungen der  $\alpha_s$ -Werte sind als Punkte mit Fehlerbalken dargestellt. Die Fehler enthalten statistische und systematische Unsicherheiten. Die gestrichelten Kurven zeigen die Vorhersagen der Vier-Schleifen- $\beta$ -Funktion nach Anpassung an die Meßwerte, mit Ausnahme der Punkte bei  $s_0 = 1.3 \text{ GeV}^2$ . Die durchgezogenen Linien entsprechen den Fehlern der Anpassungen.

In Abbildung 7.15 sind die  $\alpha_s$ -Werte aus der CIPT-Anpassung zusammen mit einer Extrapolation der  $\beta$ -Funktion von 1 GeV bis 200 GeV sowie Meßwerte anderer Experimente, die  $\alpha_s$  an verschiedenen Energien innerhalb des dargestellten Bereiches gemessen haben [75–77] dargestellt. Bei  $m_\tau$  ist deutlich der Wechsel von  $n_f = 3$  auf  $n_f = 4$  Quarksorten an dem Sprung in der  $\beta$ -Funktion festzustellen. Der zweite Sprung bei  $m_b = 4.13$  GeV ist allerdings kaum auszumachen. Ab  $m_b$  ist die  $\beta$ -Funktion für  $n_f = 5$  Quarksorten dargestellt. Die eingezeichneten Werte aus der CIPT-Anpassung enthalten experimentelle und systematische Unsicherheiten, das Fehlerband der  $\beta$ -Funktion entspricht aber der Extrapolation des Meßwertes bei  $m_\tau$  inklusive aller experimentellen, systematischen und theoretischen Unsicherheiten. Vergleicht man die verschiedenen  $\alpha_s$ -Messungen mit dem aus dem  $\tau$ -Zerfall extrapolierten Verhalten, kann eine grobe Einteilung in zwei Klassen erfolgen. Unterhalb von 10 GeV neigen alle Messungen zu kleineren Werten als die  $\tau$ -Messung für diesen Bereich impliziert, während oberhalb 10 GeV eine gute Übereinstimmung mit der Extrapolation aus dem  $\tau$ -Zerfall beobachtet werden kann. Das Laufen der starken Kopplung ist damit trotz der beschriebenen leichten Diskrepanzen über einen weiten Energiebereich etabliert, und gerade die Übereinstimmung der Messungen mit der  $\beta$ -Funktion unterhalb der  $\tau$ -Masse sowie bei der  $Z^0$ -Masse zeigt, daß eine energieunabhängige Kopplungskonstante in der QCD auszuschließen ist.

Abbildungen 7.13 und 7.14 können als Tests der Gültigkeit der OPE für  $s_0$ -Werte unterhalb von  $m_\tau^2$  angesehen werden. In z.B. [5] ist die Gültigkeit der Definition von  $R_\tau(s_0)$  für  $s_0 < m_\tau^2$  in Frage gestellt worden, da die Argumentation bei der Umwandlung des Linienintegrals in ein Kreisintegral darauf beruht, daß der Integrand am Endpunkt  $s_0$  keinen Pol besitzt. Für  $s_0 = m_\tau^2$  wird ein möglicher Pol der Spektralfunktion bei  $m_\tau^2$  durch das Phasenraumpolynom  $(1 - s/m_\tau^2)^2$  im Integral quadratisch unterdrückt. Für kleinere  $s_0$ -Werte findet eine Unterdrückung aber nicht statt. Die gute Übereinstimmung der Daten mit dem CIPT-Resultat einerseits und der extrahierten  $\alpha_s$ -Werte mit der  $\beta$ -Funktion andererseits zeigt, daß die OPE für CIPT auch unterhalb der  $\tau$ -Masse anwendbar ist.

### 7.5.1 Die Zerfallsrate eines hypothetischen $\tau'$ -Leptons

Einen weiteren Test der drei Theorien erhält man, indem man die totale hadronische Zerfallsrate für ein hypothetisches  $\tau'$ -Lepton mit der Masse  $m_{\tau'} = \sqrt{s_0}$  definiert und in den Gleichungen (2.27) und (2.54) für jedes  $m_\tau$   $m_{\tau'}$  einsetzt [72]:

$$R_{\tau',V/A}(s_0) = 12\pi S_{EW} |V_{ud}|^2 \int_0^{s_0} \frac{ds}{s_0} \left(1 - \frac{s}{s_0}\right)^2 \left[ \left(1 + 2\frac{s}{s_0}\right) \text{Im}H_{V/A}^{(1)}(s) + \text{Im}H_{V/A}^{(0)}(s) \right]. \quad (7.23)$$

Diese Größe profitiert von derselben quadratischen Unterdrückung des Endpunktes auf der reellen  $s$ -Achse wie  $R_{\tau,V/A}(m_\tau^2)$  und ist auch bei möglichen Polen der Spektralfunktionen auf der reellen  $s$ -Achse wohldefiniert. Abbildung 7.16 zeigt die Summe  $R_{\tau',V}(s_0) + R_{\tau',A}(s_0)$  als Funktion der oberen Integrationsgrenze  $s_0$ . Das Fehlerband für CIPT im unteren Bild macht deutlich, daß die Unsicherheiten für diese Größe bei Integrationsgrenzen unterhalb von  $s_0 \simeq 1.5 \text{ GeV}^2$  im Vergleich zu den Unsicherheiten, die im unteren Bild der Abbildung 7.13 dargestellt sind, deutlich ansteigen.

Während der dominante Fehler von  $R_\tau(s_0)$  auch bei kleinen  $s_0$  durch die perturbative Entwicklung gegeben ist, trägt hier für  $R_{\tau'}(s_0)$  hauptsächlich die Abhängigkeit von den nicht-perturbativen Termen zum Fehler bei. Für  $R_\tau$  bleiben, abgesehen von der schwachen logarithmischen Abhängigkeit dieser Terme von  $s_0$ , die nicht-perturbativen Terme konstant für alle  $s_0$  (siehe Gleichung (2.76)). Für  $R_{\tau'}$  dagegen wachsen die nicht-perturbativen Terme mit Potenzen von  $1/s_0$  an, wenn  $s_0$  kleiner wird. Im Rahmen der Fehler liefern beide Definitionen,  $R_\tau(s_0)$  und  $R_{\tau'}(s_0)$ , für alle drei Theorien konsistente Resultate.

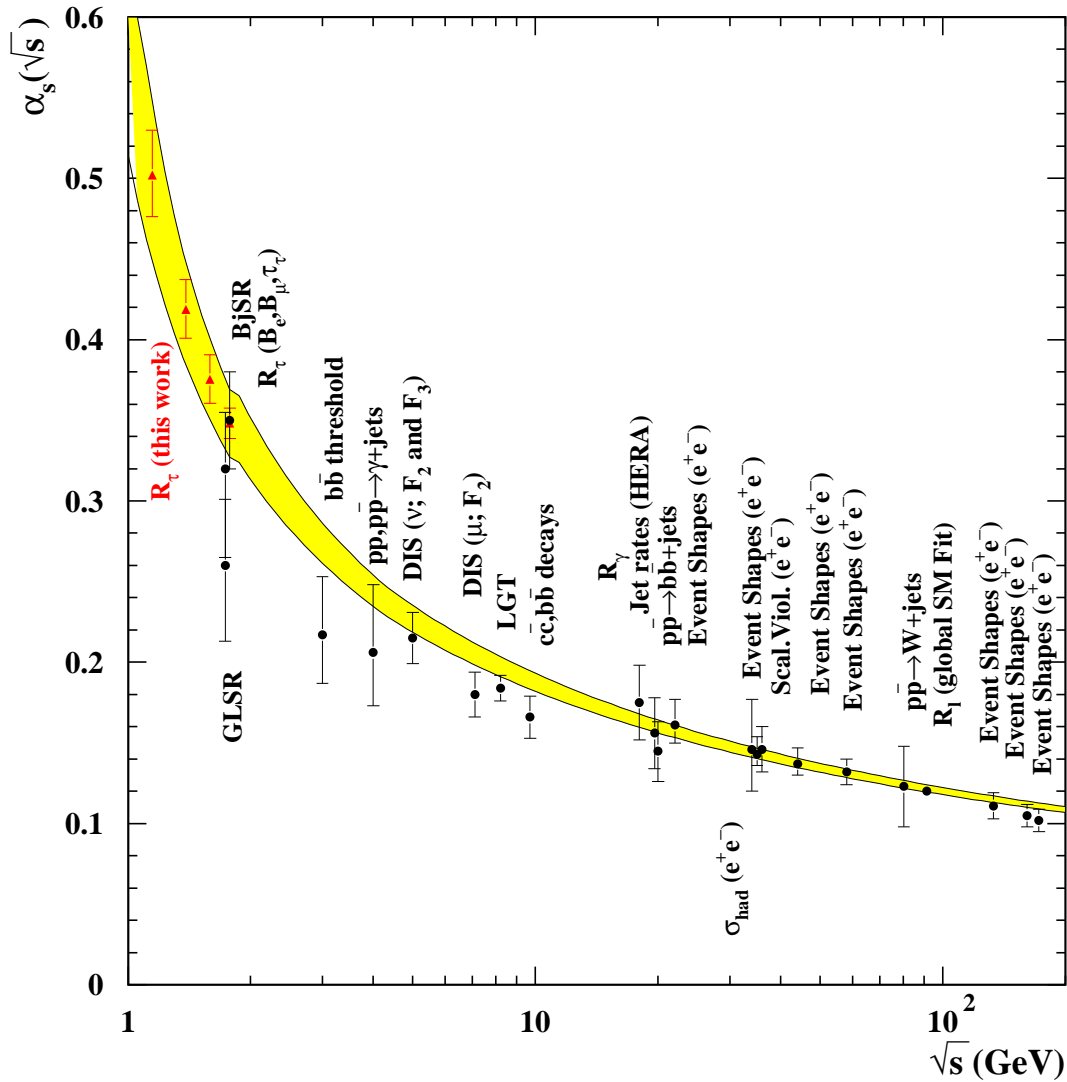


Abbildung 7.15: Messungen der starken Kopplungskonstanten zwischen  $1.3 \text{ GeV}$  und  $172 \text{ GeV}$  von verschiedenen Experimenten. Die mit Dreiecken dargestellten Werte entsprechen den korrelierten  $\alpha_s$ -Messungen aus der CIPT-Anpassung und ihre Fehler entsprechen experimentellen und systematischen Unsicherheiten. Alle anderen Werte sind inklusive der theoretischen Fehler eingezeichnet. Der mit  $R_\tau(B_e, B_\mu, \tau_\tau)$  gekennzeichnete Wert stammt aus [75] und entspricht dem aus den leptonischen Verzweungsverhältnissen und der  $\tau$ -Lebensdauer gemittelten  $\alpha_s$ -Wert. Die übrigen Werte sind [76, 77] entnommen. Das graue Band ist die aus der CIPT-Messung bei  $s = m_\tau^2$  extrapolierte Vorhersage der  $\beta$ -Funktion, unter Berücksichtigung experimenteller, systematischer und theoretischer Unsicherheiten.

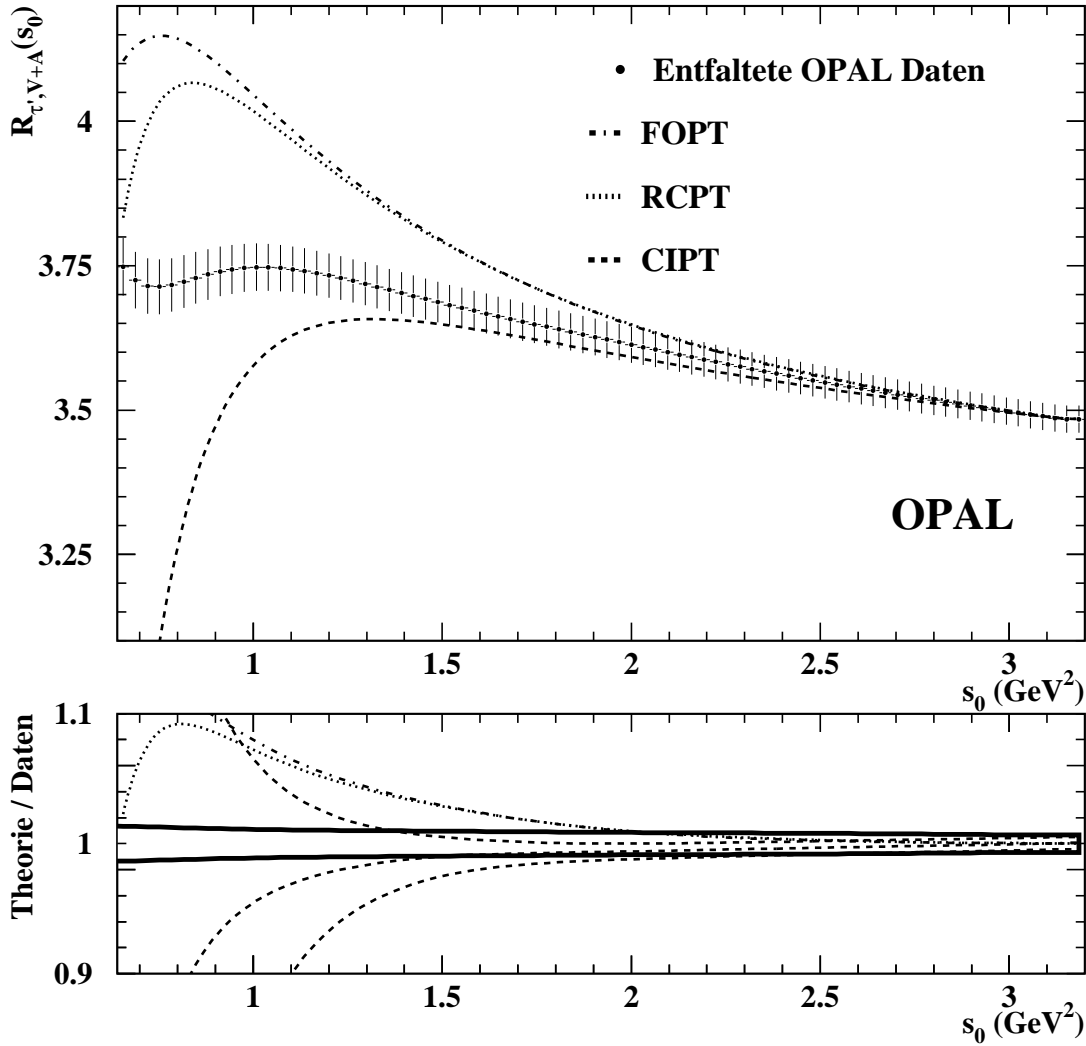


Abbildung 7.16: Die nicht-seltamen, hadronische Zerfallsrate  $R_{\tau',V}(s_0) + R_{\tau',A}(s_0)$  eines hypothetischen  $\tau'$ -Leptons mit  $m_{\tau'}^2 = s_0$  als Funktion der oberen Integrationsgrenze  $s_0$ . Die Punkte im oberen Bild entsprechen OPAL-Daten. Die gestrichelte, gestrichpunktete und gepunktete Kurve geben die Vorhersagen der Theorien CIPT, FOPT und RCPT wieder, wobei die Resultate der Anpassungen bei  $s_0 = m_{\tau'}^2$  für die Vorhersagen benutzt wurden. Das untere Bild zeigt die Verhältnisse der drei Theorien normiert auf die Daten. Die drei gestrichelten Kurven geben die Zentralwerte und die experimentellen Gesamtfehler für CIPT an. Die gestrichpunktete und die gepunktete Kurve geben jeweils die Zentralwerte für FOPT und RCPT an. Die Fehler für FOPT und RCPT sind vergleichbar mit den Fehlern für CIPT und wurden im Bild weggelassen. Die durchgezogenen Kurven zeigen den Fehler der Daten, inklusive aller statistischen und systematischen Unsicherheiten.

## 7.6 Messung der nicht-perturbativen Korrekturen

Die Ergebnisse der Anpassung 2 an die separaten Momente des Vektor- und Axialvektorstroms sind in Tabelle 7.10 für die drei betrachteten Theorien zusammengestellt. Im Gegensatz zur

Theorie	Observable	Wert	Beitragende Fehler				$\chi^2/\text{d.o.f.}$
			Daten	$B$	Syst.	Theo.	
CIPT	$\alpha_s(m_\tau^2)$	0.347	$\pm 0.001$	$\pm 0.012$	$\pm 0.002$	$\pm 0.019$	0.63/4
	$\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle / \text{GeV}^4$	0.001	$\pm 0.003$	$\pm 0.006$	$\pm 0.003$	$\pm 0.004$	
	$\delta_V^6$	0.0256	$\pm 0.0017$	$\pm 0.0024$	$\pm 0.0017$	$\pm 0.0006$	
	$\delta_V^8$	-0.0080	$\pm 0.0010$	$\pm 0.0007$	$\pm 0.0005$	$\pm 0.0002$	
	$\delta_A^6$	-0.0197	$\pm 0.0016$	$\pm 0.0022$	$\pm 0.0019$	$\pm 0.0010$	
	$\delta_A^8$	0.0041	$\pm 0.0012$	$\pm 0.0013$	$\pm 0.0008$	$\pm 0.0002$	
FOPT	$\alpha_s(m_\tau^2)$	0.323	$\pm 0.001$	$\pm 0.008$	$\pm 0.002$	$\pm 0.014$	0.62/4
	$\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle / \text{GeV}^4$	0.017	$\pm 0.003$	$\pm 0.004$	$\pm 0.003$	$\pm 0.010$	
	$\delta_V^6$	0.0271	$\pm 0.0017$	$\pm 0.0025$	$\pm 0.0018$	$\pm 0.0056$	
	$\delta_V^8$	-0.0085	$\pm 0.0010$	$\pm 0.0007$	$\pm 0.0005$	$\pm 0.0012$	
	$\delta_A^6$	-0.0183	$\pm 0.0016$	$\pm 0.0023$	$\pm 0.0019$	$\pm 0.0052$	
	$\delta_A^8$	0.0036	$\pm 0.0011$	$\pm 0.0012$	$\pm 0.0008$	$\pm 0.0011$	
RCPT	$\alpha_s(m_\tau^2)$	0.305	$\pm 0.001$	$\pm 0.007$	$\pm 0.001$	$\pm 0.011$	0.61/4
	$\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle / \text{GeV}^4$	0.002	$\pm 0.003$	$\pm 0.005$	$\pm 0.003$	$\pm 0.001$	
	$\delta_V^6$	0.0202	$\pm 0.0018$	$\pm 0.0033$	$\pm 0.0018$	$\pm 0.0009$	
	$\delta_V^8$	-0.0075	$\pm 0.0010$	$\pm 0.0008$	$\pm 0.0005$	$\pm 0.0002$	
	$\delta_A^6$	-0.0252	$\pm 0.0017$	$\pm 0.0032$	$\pm 0.0020$	$\pm 0.0006$	
	$\delta_A^8$	0.0047	$\pm 0.0012$	$\pm 0.0013$	$\pm 0.0008$	$\pm 0.0001$	

Tabelle 7.10: Das Resultat für  $\alpha_s$  und die nicht-perturbativen Parameter aus der Anpassung 2 an die separaten Momente des Vektor- und Axialvektorstroms. Die angegebenen Werte beziehen sich auf die drei verschiedenen Theorien, die den perturbativen Anteil der Momente beschreiben. Die zitierten Fehler entsprechen den statistischen Fluktuationen der Daten, den Fehlern der Verzweigungsverhältnisse  $B$ , einem systematischen Fehler durch die Simulation, die Energie- und Impuls-Kalibration und die Entfaltung sowie einem Gesamtfehler aus den theoretischen Fehlerquellen.

Kopplungskonstanten  $\alpha_s$ , deren Fehler durch theoretische Unsicherheiten dominiert wird, sind die nicht-perturbativen Terme aus den Anpassungen mit CIPT und RCPT im wesentlichen unabhängig von diesen. Wie bereits in Abschnitt 7.4 erwähnt, gilt dies nicht für die FOPT-Anpassung, in der die theoretischen Unsicherheiten zu Fehlern derselben Größenordnung (oder sogar größeren Fehlern) führen wie die experimentellen Unsicherheiten. Aufgrund der Korrelation der Vektor- und Axialvektorspektren durch fehlidentifizierte  $\tau$ -Zerfälle, die in der Entfaltung erhalten bleibt, sind die nicht-perturbativen Momente, die zu verschiedenen Strömen aber derselben Dimension gehören, stark positiv korreliert. Die Korrekturterme eines Stromes, die zu

	$\alpha_s(m_\tau^2)$	$\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle$	$\delta_V^6$	$\delta_A^6$	$\delta_V^8$
$\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle$	-57				
$\delta_V^6$	-55	99			
$\delta_A^6$	-61	96	96		
$\delta_V^8$	41	-92	-90	-84	
$\delta_A^8$	42	-87	-86	-77	89

Tabelle 7.11: Korrelationen zwischen den QCD-Parametern aus der Anpassung 2 an die Momente des Vektor- und Axialvektorstroms in Prozent. Die angegebenen Werte beziehen sich auf das CIPT-Resultat.

unterschiedlichen Dimensionen gehören, sind dagegen stark antikorreliert. Alle Korrelationen der Parameter aus der CIPT-Anpassung sind in Tabelle 7.11 angegeben.

Die resultierenden Werte der starken Kopplungskonstanten aus den Anpassungen 1 und 2 stimmen für alle drei Theorien sehr gut miteinander überein. Der experimentelle Fehler von  $\alpha_s$  aus der Anpassung 2 ist größer als der entsprechende Fehler aus Anpassung 1, da hier die zusätzliche Information aus der  $\tau$ -Lebensdauer und dem Verzweigungsverhältnis  $B(\tau \rightarrow \mu\nu_\mu\nu_\tau)$  fehlt. Im Sinne der Gleichung (7.15) sind auch die nicht-perturbativen Korrekturterme aus den Anpassungen an die Summe der Momente bzw. an die separaten Momente in guter Übereinstimmung. Wie in Anpassung 1 sind auch die  $\chi^2$ -Werte in Anpassung 2 für alle drei Theorien vergleichbar. Die theoretischen Unsicherheiten in beiden Anpassungen zeigen erwartungsgemäß dasselbe Verhalten. Die Summen  $\delta_{\text{non-pert},V/A}$  und  $\delta_{\text{non-pert},V+A}$  aller nicht-perturbativen Korrekturen zu  $R_{\tau,V/A}$  und  $R_{\tau,V} + R_{\tau,A}$ , inklusive der Massen-Korrekturen der Dimension 2 und der Korrekturen der Dimension 4, die aus dem angepaßten Gluonkondensat folgen, lauten:

$$\delta_{\text{non-pert},V} = \begin{array}{ll} 0.0172 \pm 0.0026 & \text{CIPT} \\ 0.0187 \pm 0.0054 & \text{FOPT} \\ 0.0124 \pm 0.0033 & \text{RCPT,} \end{array} \quad (7.24)$$

$$\delta_{\text{non-pert},A} = \begin{array}{ll} -0.0219 \pm 0.0026 & \text{CIPT} \\ -0.0204 \pm 0.0050 & \text{FOPT} \\ -0.0266 \pm 0.0032 & \text{RCPT,} \end{array} \quad (7.25)$$

$$\delta_{\text{non-pert},V+A} = \begin{array}{ll} -0.0024 \pm 0.0025 & \text{CIPT} \\ -0.0009 \pm 0.0051 & \text{FOPT} \\ -0.0071 \pm 0.0031 & \text{RCPT,} \end{array} \quad (7.26)$$

wobei die Fehler sowohl experimentelle und systematische als auch theoretische Unsicherheiten enthalten. Demnach führen alle drei Theorien zu nicht-perturbativen Korrekturen von  $R_{\tau,V}$  ( $R_{\tau,A}$ ) in der Größenordnung 1.6% (-2.3%), während sich beide Korrekturen bei der Summenbildung größtenteils gegenseitig aufheben, so daß die Gesamtkorrektur aus nicht-perturbativen Beiträgen für  $R_{\tau,V} + R_{\tau,A}$  verträglich mit Null ist, und so eine präzise Messung der

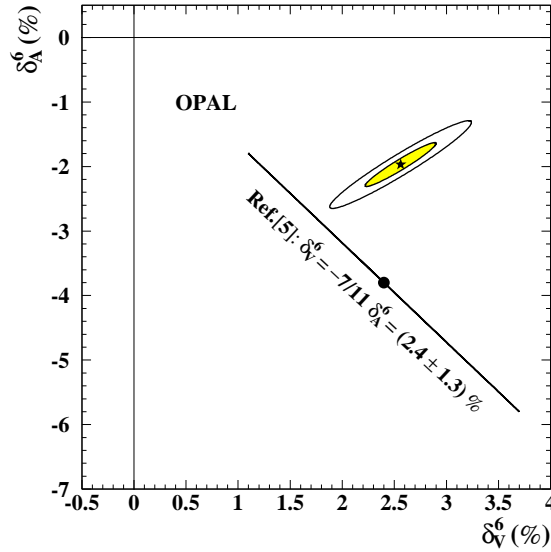


Abbildung 7.17: Die Korrekturterme der Dimension  $D = 6$  zu  $R_{\tau, V/A}$ . Dargestellt sind die Konturen der Ellipsen, deren Punkte eine Standardabweichung bzw. zwei Standardabweichungen, unter Berücksichtigung experimenteller und theoretischer Unsicherheiten, von den korrelierten Zentralwerten für den Vektor- und Axialvektorstrom abweichen (CIPT). Die durchgezogene Linie entspricht der theoretischen Vorhersage aus [5].

starken Kopplungskonstanten in Anpassung 1 erlaubt. Die Werte in Tabelle 7.10 können mit den Abschätzungen aus [5] verglichen werden:

$$\begin{aligned}
 \langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle / \text{GeV}^4 &= 0.02 \pm 0.01 \\
 \delta_V^6 &= 0.024 \pm 0.013 \\
 \delta_A^6 &= -0.038 \pm 0.020 \\
 \delta_{V/A}^8 &\simeq -0.0001.
 \end{aligned} \tag{7.27}$$

Nur die Terme der Dimension 8 scheinen unterschätzt worden zu sein, während die übrigen Terme im Rahmen ihrer Fehler der jeweiligen Vorhersage entsprechen. In Abbildung 7.17 sind die Korrekturen der Dimension 6 (CIPT) und die Abschätzungen aus [5] dargestellt.

Schränkt man die Anpassung 2 auf die fünf Momente, die zu einem der beiden Ströme gehören, ein, läßt sich überprüfen, ob die OPE für beide Ströme konsistente Ergebnisse liefert und ob die gemeinsame Anpassung an Vektor- und Axialvektor-Momente mit den getrennt angepassten Werten übereinstimmt. Die zu vergleichenden Ergebnisse sind in Tabelle 7.12 für die Anpassungen mit CIPT angegeben, wobei nur die statistischen Unsicherheiten der gemessenen Spektren, der Simulation und der Verzweigungsverhältnisse in den zitierten Fehlern berücksichtigt sind, da die verbleibenden systematischen Fehler und die theoretischen Fehler vollständig korreliert sind.

Innerhalb der unkorrelierten Fehler stimmen die Resultate für  $\alpha_s$  und  $\langle \alpha_s / \pi GG \rangle$  aus den Anpassungen an die Vektorstrom-Momente einerseits und die Axialvektorstrom-Momente andererseits überein. Wie erwartet reduzieren sich die Fehler dieser beiden Größen, wenn alle zehn Momente gemeinsam in der Anpassung verwendet werden, und ihr Wert verschiebt sich in die Nähe des fehlergewichteten Mittels der separaten Anpassungsergebnisse. Die Korrelationen der

Theorie	Observable	V		A		V und A	
		Wert	Fehler	Wert	Fehler	Wert	Fehler
CIPT	$\alpha_s(m_\tau^2)$	0.341	$\pm 0.017$	0.357	$\pm 0.019$	0.347	$\pm 0.012$
	$\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle / \text{GeV}^4$	0.002	$\pm 0.010$	-0.011	$\pm 0.020$	0.001	$\pm 0.008$
	$\delta_V^6$	0.0259	$\pm 0.0041$	—	—	0.0256	$\pm 0.0034$
	$\delta_V^8$	-0.0078	$\pm 0.0018$	—	—	-0.0080	$\pm 0.0013$
	$\delta_A^6$	—	—	-0.0246	$\pm 0.0086$	-0.0197	$\pm 0.0033$
	$\delta_A^8$	—	—	0.0067	$\pm 0.0050$	0.0041	$\pm 0.0019$
	$\chi^2/\text{d.o.f.}$	0.07/1		0.06/1		0.63/4	

Tabelle 7.12: Vergleich der Resultate aus den separaten Anpassungen an die fünf Momente eines Stromes und den Resultaten aus der gleichzeitigen Anpassung an alle zehn Momente. Die angegebenen Fehler enthalten statistische Unsicherheiten der Daten, der Simulation und der Verzweigungsverhältnisse.

angepaßten Parameter (siehe Tabelle 7.11) führt auch bei den  $\delta_{V/A}^{6,8}$  in der gemeinsamen Anpassung zu genaueren Resultaten als in den separaten Anpassungen. Im Rahmen der Fehler führen beide Anpassungen zu konsistenten Ergebnissen.

## 7.7 Vergleich mit anderen Experimenten

Die hier vorgestellte Methode, aus den Momenten von  $R_\tau$  simultan die starke Kopplungskonstante  $\alpha_s$  und nicht-perturbative QCD-Parameter zu bestimmen, ist von der ALEPH-Kollaboration bereits 1993 [79] (ALEPH 93) durchgeführt worden und 1998 auf alle LEP-I Datensätze erweitert worden [72] (ALEPH 98). Von der CLEO-Kollaboration ist 1995 ebenfalls, unter Verwendung der Momente von  $R_\tau$ , eine Messung von  $\alpha_s$  publiziert worden [78] (CLEO 95).

Die hier vorgestellte Analyse (OPAL 98) unterscheidet sich von den drei eben genannten vor allem durch die Entfaltungsmethode, mit der die gemessenen Spektren korrigiert werden. Während dort Korrelationen zwischen den korrigierten Spektren durch fehlidentifizierte  $\tau$ -Zerfälle im Summenspektrum aus Vektor- und Axialvektorspektralfunktion nicht berücksichtigt worden sind, sind hier in allen Resultaten die Korrelationen beider Spektralfunktionen enthalten.

Die rekonstruierten Momente von  $R_\tau$  aus den gemessenen Daten sind zudem stark von den jeweils benutzten Verzweigungsverhältnissen abhängig. Möchte man trotzdem die vier Experimente vergleichen, bietet es sich an, die Verhältnisse der Momente

$$D_\tau^{kl} = \frac{R_{\tau,V}^{kl} + R_{\tau,A}^{kl}}{R_{\tau,V}^{00} + R_{\tau,A}^{00}}, \quad (7.28)$$

in die die Verzweigungsverhältnisse nicht mehr so dominant eingehen, zu betrachten. In Abbildung 7.18 sind die vier  $D_\tau^{kl}$  für  $kl = 10, 11, 12, 13$  aus den vier Analysen dargestellt.

Die Übereinstimmung mit den ALEPH 98-Werten ist sehr gut, während in den beiden älteren Analysen leicht abweichende Resultate beobachtet wurden. Die Abweichungen sind vor allem darauf zurückzuführen, daß die  $2K\pi$ -Kanäle, die bei OPAL 98 und ALEPH 98 berücksichtigt wurden, in ALEPH 93 und CLEO 95 vernachlässigt worden sind. In Tabelle 7.13 sind die mit CIPT ermittelten Werte für die starke Kopplungskonstante aus den Anpassungen an  $R_{\tau,V} + R_{\tau,A}$  (bzw.  $R_\tau$ ) und die  $D_\tau^{kl}$  der vier Analysen angegeben. Erwartungsgemäß sind die Resultate



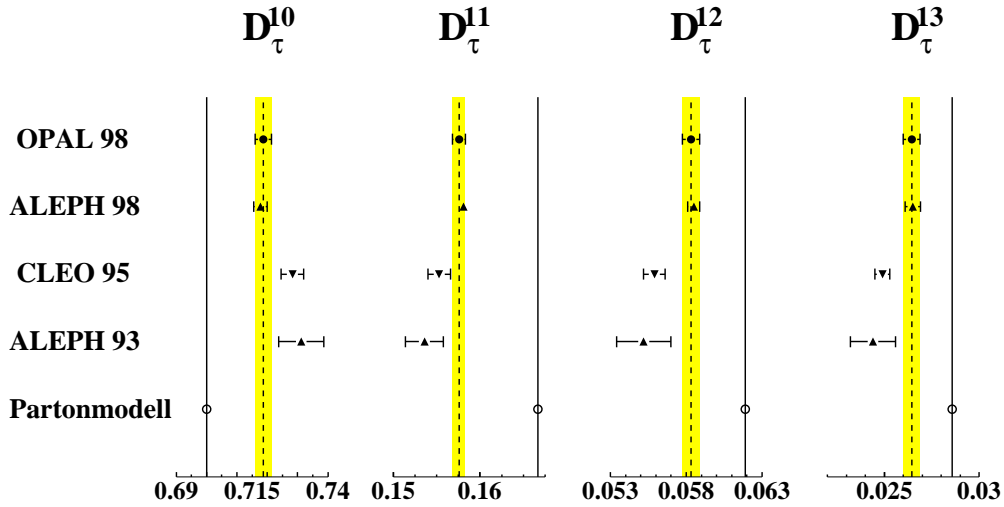


Abbildung 7.18: Die normierten Momente  $D_\tau^{kl}$  für  $kl = 10, 11, 12, 13$  aus dieser Analyse (OPAL 98) (siehe Tabelle 7.5) im Vergleich mit den in [72] (ALEPH 98), [78] (CLEO 95) und [79] (ALEPH 93) angegebenen Werten. Die Fehler enthalten statistische und systematische Unsicherheiten. Die gestrichelten Linien entsprechen den Zentralwerten aus dieser Arbeit und die grauen Bänder ihren Unsicherheiten. Die Vorhersagen des naiven Partonmodells sind als offene Kreise bzw. als durchgezogene Linien dargestellt.

aus ALEPH 98 und dieser Arbeit in guter Übereinstimmung. Der Wert aus ALEPH 93 ist aufgrund des größeren Fehlers mit beiden verträglich. Der etwa  $2.5\sigma$  von  $\alpha_s$  aus dieser Analyse abweichende CLEO 95-Wert ist darauf zurückzuführen, daß hier  $R_\tau$  und nicht  $R_{\tau,V} + R_{\tau,A}$  in der Anpassung benutzt wurde. Die große Masse des s-Quarks ändert dann signifikant die OPE-Korrekturterme und das Anpassungsergebnis hängt von den für das s-Quark angenommenen Korrekturen, die nicht aus den  $D_\tau^{kl}$  zu bestimmen sind, ab.

In Abbildung 7.19 ist ein Vergleich der gemessenen Spektralfunktionen  $v(s)$  und  $a(s)$  mit den von ALEPH gemessenen Spektralfunktionen [72, 80] (ALEPH 98) zu sehen. Im Rahmen der Fehler stimmen die Resultate für beide Spektralfunktionen überein. Allerdings sind im Bereich der  $\rho$ - und der  $a_1$ -Resonanz die Fehler der ALEPH-Messung deutlich kleiner als die Fehler der OPAL-Messung. Dies liegt vor allem an der besseren Auflösung des ALEPH-Detektors für

Experiment	$\alpha_s(m_\tau^2)$	$\Delta\alpha_s$
OPAL 98	0.348	$\pm 0.009$
ALEPH 98	0.345	$\pm 0.007$
CLEO 95	0.306	$\pm 0.017$
ALEPH 93	0.330	$\pm 0.043$

Tabelle 7.13: Vergleich der  $\alpha_s$ -Werte aus den CIPT-Anpassungen an  $R_{\tau,V} + R_{\tau,A}$  und  $D_\tau^{kl}$  für  $kl = 10, 11, 12, 13$  aus dieser Analyse (OPAL 98) und [72] (ALEPH 98) sowie den CIPT-Anpassungen an  $R_\tau$  und  $D_\tau^{kl}$  für  $kl = 10, 11, 12, 13$  aus [78] (CLEO 95) und [79] (ALEPH 93). Die zitierten Fehler enthalten statistische und systematische Unsicherheiten (Für ALEPH 93 ist  $0.017$  quadratisch vom zitierten Fehler  $0.046$  abgezogen worden, um den experimentellen Fehler zu erhalten.).

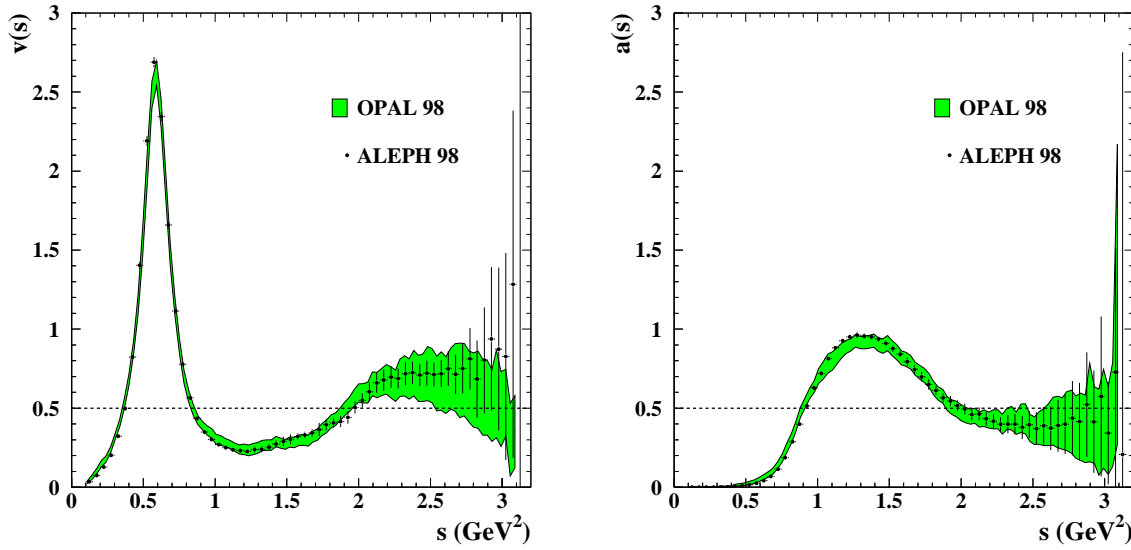


Abbildung 7.19: Vergleich der Spektralfunktionen aus dieser Analyse (OPAL 98) und [72, 80] (ALEPH 98). Links ist die Spektralfunktion des Vektorstroms dargestellt und rechts die Spektralfunktion des Axialvektorstroms. OPAL-Daten sind als graues Fehlerbänder im Vergleich mit den ALEPH-Daten (Punkte mit Fehlerbalken) abgebildet. Die Vorhersagen des naiven Partonmodells sind als gestrichelte Linien eingezeichnet.

neutrale Pionen, so daß in der Entfaltung bei ALEPH im wesentlichen die statistischen Fehler der gemessenen Spektren resultieren, während bei OPAL die Entfaltung zu einer stärkeren Korrelation benachbarter Intervalle führt, so daß die resultierenden Fehler in den entfalten Spektren ansteigen. Die Berücksichtigung der Korrelationen durch fehlidentifizierte  $\tau$ -Zerfälle bei OPAL 98 führt ebenfalls zu größeren Fehlern in den Spektralfunktionen. Am Ende des Phasenraums ( $s \rightarrow m_\tau^2$ ) sind die Fehler statistisch limitiert und in guter Übereinstimmung zwischen beiden Experimenten.

Für die Werte der Vektorspektralfunktion werden am Ende des Phasenraums unterschiedliche Tendenzen bei OPAL 98 und ALEPH 98 beobachtet. Während  $v(s)$  bei OPAL 98 am Ende des Phasenraums abfällt, steigt die Funktion bei ALEPH 98 leicht an. Die Unsicherheiten beider Experimente in diesem Bereich sind allerdings sehr groß, und beide Messungen stimmen trotz der unterschiedlichen Tendenzen im Rahmen der Fehler überein.

## 7.8 QCD-Summenregeln

Gewichtete Integrale über die Differenz der beiden gemessenen Spektralfunktionen (siehe Abbildung 7.12) können mit den Vorhersagen der im asymptotischen Limes geltenden Summenregeln der QCD verglichen werden:

$$I_1(s_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{s_0} ds (v(s) - a(s)) = f_\pi^2 \quad (7.29)$$

$$I_2(s_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{s_0} ds s (v(s) - a(s)) = 0 \quad (7.30)$$

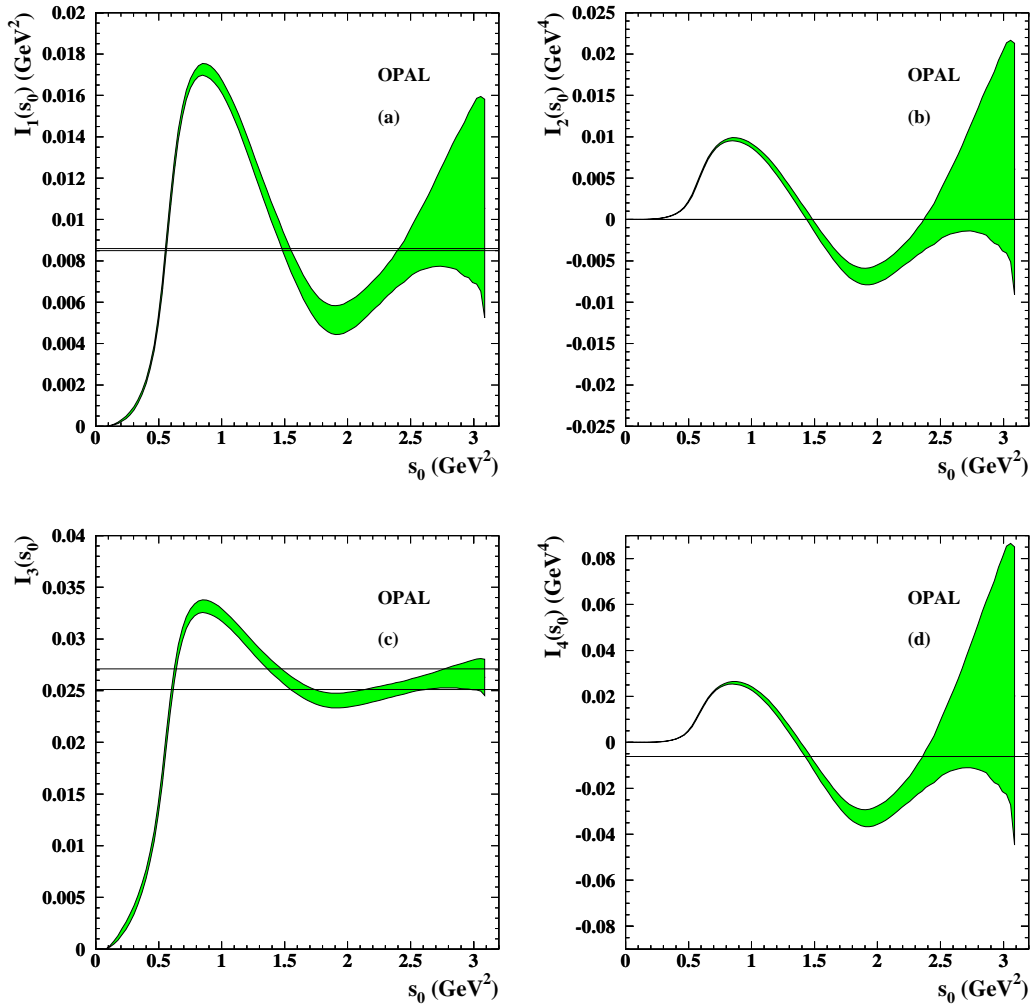


Abbildung 7.20: QCD-Summenregeln. Gleichungen (7.29)–(7.32) entsprechen den Bildern (a)–(d). Als Fehlerbänder sind jeweils die Werte des Integrals ( $\pm 1\sigma$ ) als Funktion der oberen Integrationsgrenze dargestellt. Die asymptotischen Grenzwerte entsprechen den eingezeichneten durchgezogenen Linien ( $\pm 1\sigma$  wenn zwei Linien eingezeichnet sind).

$$I_3(s_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{s_0} \frac{ds}{s} (v(s) - a(s)) = f_\pi^2 \frac{\langle r_\pi^2 \rangle}{3} - F_A \quad (7.31)$$

$$I_4(s_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{s_0} ds s \ln \frac{s}{\lambda^2} (v(s) - a(s)) = -\frac{4\pi f_\pi^2}{3\alpha} (m_{\pi^\pm}^2 - m_{\pi^0}^2). \quad (7.32)$$

Die rechte Seite jeder Gleichung ist hier jeweils als der asymptotische Grenzwert des Integrals für  $s_0 \rightarrow \infty$  zu verstehen. Gleichung (7.29), die erste Weinberg-Summenregel [36], die bereits in ähnlicher Form in Kapitel 2 eingeführt wurde (siehe Gleichung (2.96)), basiert auf der Annahme, daß es keine skalaren Ströme gibt und der einzige pseudoskalare Beitrag durch den Pion-Pol (2.95) gegeben ist, und kann im asymptotischen Limes mit der Zerfallskonstanten des Pions  $f_\pi = (92.42 \pm 0.26) \text{ MeV}$  [1] berechnet werden. Die zweite Weinberg-Summenregel [36] entspricht Gleichung (7.30) und ist ebenfalls in Kapitel 2 eingeführt worden (siehe Gleichung (2.94)). Gleichung (7.31) ist die Das-Mathur-Okubo-Summenregel (DMO) [81]. Der

asymptotische Wert dieses Integrals hängt von der Zerfallskonstanten des Pions  $f_\pi$ , dem mittleren, quadrierten Ladungsradius  $\langle r_\pi^2 \rangle = (0.439 \pm 0.008) \text{ fm}^2$  [82] des Pions und dem Axialvektor-Formfaktor  $F_A = 0.0058 \pm 0.0008$  [1]<sup>3</sup> des Pions ab. Gleichung (7.32) ergibt asymptotisch den elektromagnetischen Massenunterschied zwischen neutralen und geladenen Pionen [83]. Wegen der zweiten Weinberg-Summenregel hängt Gleichung (7.32) nicht von dem Wert des Abschneideparameters  $\lambda$  ab.

Das asymptotische Verhalten der vier Summenregeln wird unter Berücksichtigung der vollen Korrelation der gemessenen Spektralfunktionen einschließlich der experimentellen und systematischen Unsicherheiten getestet. Die vier Diagramme in Abbildung 7.20 zeigen die gemessenen Werte der Integrale  $I_1$ - $I_4$  in Abhängigkeit von den oberen Integrationsgrenzen innerhalb ihrer  $\pm 1\sigma$ -Umgebung als Fehlerbänder. Die erwarteten asymptotischen Grenzwerte sind hier als dünne Linien, die den aktuellen  $\pm 1\sigma$  Bereichen [1] entsprechen, dargestellt.

Alle vier Summenregeln sind innerhalb ihrer Fehler an der  $\tau$ -Massenskala erfüllt. Allerdings sind die Fehler aufgrund des kleinen Phasenraumfaktors in der Nähe der  $\tau$ -Masse, der bei den Spektralfunktionen im Nenner steht, sehr groß. Eine Ausnahme bildet die DMO-Summenregel, in der die Spektralfunktionen bei hohen  $s$ -Werten durch einen  $1/s$ -Faktor unterdrückt werden. Bei  $s_0 = m_\tau^2$  liefert Gleichung (7.31) den Wert:

$$I_3(m_\tau^2) = (26.3 \pm 1.8) \cdot 10^{-3}, \quad (7.33)$$

wobei der Fehler alle experimentellen und systematischen Unsicherheiten enthält.

### 7.8.1 Polarisierbarkeit des Pions

Die elektrische Polarisierbarkeit  $\alpha_E$  des geladenen Pions gibt an, wie groß das elektrische Dipolmoment  $\mathbf{p}$  des Pions unter Einfluß eines äußeren elektrischen Feldes  $\mathbf{E}$  ist:

$$\mathbf{p} = \alpha_E \mathbf{E}. \quad (7.34)$$

Die mit diesem Dipolmoment verknüpfte potentielle Energie

$$V = -\alpha_E \mathbf{E}^2 \quad (7.35)$$

verändert die Amplitude des Prozesses  $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$ , die in [84] unter Ausnutzung der DMO-Summenregel 7.31 berechnet worden ist.

Unter der Annahme, daß die DMO-Summenregel, die in Abbildung 7.20 (c) dargestellt ist, bei der  $\tau$ -Masse bereits ihren asymptotischen Wert erreicht hat, kann umgekehrt, entsprechend eines Vorschlags in [85], die elektrische Polarisierbarkeit des geladenen Pions aus ihrem Wert bestimmt werden:

$$\alpha_E = \frac{\alpha}{m_{\pi^\pm}} \left( \frac{\langle r_\pi^2 \rangle}{3} - \frac{I_3}{f_\pi^2} \right). \quad (7.36)$$

Mit dem Ergebnis aus dem vorhergehenden Abschnitt (Gleichung (7.33)) erhält man:

$$\alpha_E = (2.71 \pm 0.88) \cdot 10^{-4} \text{ fm}^3, \quad (7.37)$$

in guter Übereinstimmung mit dem in [85] abgeleiteten Wert  $\alpha_E = (2.64 \pm 0.36) \cdot 10^{-4} \text{ fm}^3$ .

<sup>3</sup> Diese Definitionen von  $F_A$  und  $f_\pi^2$  unterscheiden sich um einen Faktor  $1/2$  von den Definitionen in [1].

## 8. Zusammenfassung

Messungen der Spektralfunktionen des Vektor- und Axialvektorstroms mit hadronischen  $\tau$ -Zerfällen, die zwischen 1990 und 1995 mit dem OPAL-Detektor bei LEP aufgezeichnet wurden, und deren Anwendungen in der QCD sind in dieser Arbeit vorgestellt worden.

Im Rahmen dieser Analyse ist eine neue Methode entstanden, um neutrale Pionen in hadronischen  $\tau$ -Zerfällen zu rekonstruieren. Eine Entfaltungsmethode, die die Korrelationen der gemessenen Spektren in den Zerfallskanälen  $\tau \rightarrow \nu_\tau + X$ , mit  $X = \pi\pi^0, \pi 2\pi^0, \pi 3\pi^0, 3\pi, 3\pi\pi^0$  und  $3\pi 2\pi^0$  berücksichtigt, ist, basierend auf der in [63] vorgestellten Methode, entwickelt und zur Korrektur der Spektren angewandt worden.

Im Rahmen der Operator-Produkt-Entwicklung ist eine simultane Bestimmung fundamentaler QCD-Parameter, wie der starken Kopplungskonstanten  $\alpha_s$  und dem Gluonkondensat  $\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle$ , durchgeführt worden.

Für die Summe der spektralen Momente der hadronischen Verzweungsverhältnisse des  $\tau$ -Leptons in nicht-seltene Vektor- bzw. Axialvektormesonen  $R_{\tau,V}^{kl}(m_\tau^2) + R_{\tau,A}^{kl}(m_\tau^2)$  ist eine weitgehende Neutralisierung der nicht-perturbativen Korrekturen beider Ströme festgestellt worden. Zusammen mit dem Verzweungsverhältnis  $B(\tau \rightarrow \mu\nu_\mu\nu_\tau)$  des  $\tau$ -Leptons in ein Myon und Neutrinos und der Lebensdauer  $\tau_\tau$  des  $\tau$ -Leptons konnte aus diesen Momenten die starke Kopplungskonstante präzise bestimmt werden. Unter Einsatz der sogenannten „Contour Improved Perturbation Theory“ für die perturbativen QCD Rechnungen ist der Wert

$$\alpha_s(m_\tau^2) = 0.348 \pm 0.009_{\text{exp}} \pm 0.019_{\text{theo}}$$

bei der  $\tau$ -Masse und

$$\alpha_s(m_Z^2) = 0.1219 \pm 0.0010_{\text{exp}} \pm 0.0017_{\text{theo}}$$

bei der  $Z^0$ -Masse gemessen worden, wobei der erste Fehler experimentellen Unsicherheiten, die durch die Verzweungsverhältnisse dominiert werden, entspricht und der zweite Fehler theoretische Unsicherheiten, die durch unbekannt höhere Ordnungen ( $\sim O(\alpha_s^4)$ ) in den perturbativen Entwicklungen von  $R_{\tau,V/A}^{kl}$  dominiert werden, abdeckt. Die, mit der sogenannten „Fixed Order Perturbation Theory“ bzw. der „Renormalon Chain Perturbation Theory“ anstelle von CIPT gewonnenen Werte für  $\alpha_s(m_Z^2)$ , sind 2.3 % bzw. 4.1 % kleiner als der mit CIPT bestimmte Wert.

Der Beitrag nicht-perturbativer Korrekturen zu  $R_{\tau,V}(m_\tau^2)$  ( $R_{\tau,A}(m_\tau^2)$ ) ist zu  $(1.6 \pm 0.4) \%$  ( $(-2.3 \pm 0.4) \%$ ) bestimmt worden, während für die Summe  $R_{\tau,V}(m_\tau^2) + R_{\tau,A}(m_\tau^2)$  nicht-perturbative Beiträge von nur  $(-0.3 \pm 0.4) \%$  gefunden wurden. Hier enthalten die Fehler alle experimentellen und theoretischen Unsicherheiten.

Unter der Annahme, daß die Operator-Produkt-Entwicklung auch für Energieskalen unterhalb der  $\tau$ -Masse gültig ist, ist das Laufen der starken Kopplungskonstanten zwischen  $s_0 \simeq 1.3 \text{ GeV}^2$  und  $s_0 = m_\tau^2$  getestet worden. Die mit CIPT gemessenen Werte für  $\alpha_s(s_0)$  in diesem Intervall stimmen sehr gut mit der Vorhersage der 4-Schleifen- $\beta$ -Funktion überein.

Die Gültigkeit von QCD-Summenregeln, in die die Differenz der Spektralfunktionen für den Vektor- und den Axialvektorstrom eingehen, wurde getestet und führte zu einer Messung der elektrischen Polarisierbarkeit des Pions  $\alpha_E = (2.71 \pm 0.88) \cdot 10^{-4} \text{ fm}^3$  mit der Das-Mathur-Okubo-Summenregel.

Die hier vorgestellten Resultate sind von der OPAL-Kollaboration [86] publiziert worden.



## Literaturverzeichnis

- [1] Particle Data Group, R.M. Barnett et al., Phys. Rev. **D54** (1996) 1, and 1997 off-year partial update for the 1998 edition available on the PDG WWW pages (URL: <http://pdg.lbl.gov/>).
- [2] E. Braaten, Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 1606.
- [3] E. Braaten, Phys. Rev. **D39** (1989) 1458.
- [4] S. Narison and A. Pich, Phys. Lett. **B211** (1988) 183.
- [5] E. Braaten, S. Narison, and A. Pich, Nucl. Phys. **B373** (1992) 581.
- [6] F. Le Diberder and A. Pich, Phys. Lett. **B286** (1992) 147.
- [7] J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1964.
- [8] S. Narison, Phys. Reports **84** (1982) 263.
- [9] G. Källén and A. Sabry, K. Dan. Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd. **29** (1955) 17.
- [10] T. van Ritbergen, J.A.M. Vermaseren, and S.A. Larin, Phys. Lett. **B400** (1997) 379.
- [11] W.A. Bardeen and A.J. Buras, Phys. Rev. **D20** (1979) 166.
- [12] S.L. Adler, Phys. Rev. **D10** (1974) 3714.
- [13] K.G. Chetyrkin, A.L. Kataev, and F.V. Tkachev, Phys. Lett. **B85** (1979) 277.
- [14] M. Dine and J. Sapiirstein, Phys. Rev. Lett. **43** (1979) 668.
- [15] W. Celmaster and R.J. Gonsalves, Phys. Rev. Lett. **44** (1980) 560.
- [16] S.G. Gorishnii, A.L. Kataev, and S.A. Larin, Phys. Lett. **B259** (1991) 144.
- [17] L.R. Surguladze and M.A. Samuel, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 560, Erratum: *ibid.* **66** (1991) 2416.
- [18] F. Le Diberder and A. Pich, Phys. Lett. **B289** (1992) 165.
- [19] A. Pich, **FTUV-97-03** (1997).
- [20] A.L. Kataev and V.V. Starshenko, Mod. Phys. Lett. **A10** (1995) 235.
- [21] I.N. Bronštejn and K.A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, Harri Deutsch Verlag, Thun, 1985.
- [22] M. Neubert, Nucl. Phys. **B463** (1996) 511.

- [23] D.J. Broadhurst, *Z. Phys.* **C58** (1993) 339.
- [24] M. Beneke, *Phys. Lett.* **B307** (1993) 154.
- [25] M. Beneke, *Nucl. Phys.* **B405** (1993) 424.
- [26] C.N. Lovett-Turner and C.J. Maxwell, *Nucl. Phys.* **B452** (1995) 188.
- [27] C.J. Maxwell and D.G. Tonge, *Nucl. Phys.* **B481** (1996) 681.
- [28] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, and V.I. Zakharov, *Nucl. Phys.* **B147** (1979) 385.
- [29] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, and V.I. Zakharov, *Nucl. Phys.* **B147** (1979) 448.
- [30] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, and V.I. Zakharov, *Nucl. Phys.* **B147** (1979) 519.
- [31] K.G. Wilson, *Phys. Rev.* **179** (1969) 1499.
- [32] S. Narison, *QCD Spectral Sum Rules*, World Scientific lecture notes in physics; vol. 26, 1982.
- [33] W.J. Marciano and A. Sirlin, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 22.
- [34] W.J. Marciano and A. Sirlin, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 1815.
- [35] E. Braaten and C.S. Li, *Phys. Rev.* **D42** (1990) 3888.
- [36] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **18** (1967) 507.
- [37] R.P. Feynman and M. Gell-Mann, *Phys. Rev.* **109** (1958) 193.
- [38] M. Gell-Mann and M. Levy, *Nuovo Cim.* **16** (1960) 705.
- [39] OPAL Collaboration, K. Ahmet et al., *Nucl. Instrum. Meth.* **A305** (1991) 275.
- [40] J.R. Carter et al., *Nucl. Instrum. Meth.* **A286** (1990) 99.
- [41] O. Biebel et al., *Nucl. Instrum. Meth.* **A323** (1992) 169.
- [42] OPAL Lumi Group, *OPAL Phys. Note* **PN364** (1998).
- [43] B. Rossi, *High Energy Particles*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1952.
- [44] E. Longo and I. Sestili, *Nucl. Instrum. Meth.* **128** (1975) 283.
- [45] G.A. Akopdjanov et al., *Nucl. Instrum. Meth.* **140** (1977) 441.
- [46] M.G. Vinciter, A. Astbury, R.K. Keeler, and R. Sobie, *OPAL Internal Note* **TN174** (1993).
- [47] J. Allison et al., *Nucl. Instrum. Meth.* **A317** (1992) 47.
- [48] M. Schumacher, Private Mitteilung.
- [49] A.G. Frodesen, O. Skjeggstad, and H. Tøfte, *Probability and Statistics in Particle Physics*, Universitetsforlaget, 1979.
- [50] OPAL Collaboration, K. Ackerstaff et al., *Eur. Phys. J.* **C1** (1998) 479.
- [51] M.L. Perl et al., *Phys. Rev. Lett.* **35** (1975) 1489.



- [52] OPAL Collaboration, R. Akers et al., Phys. Lett. **B328** (1994) 207.
- [53] S. Jadach, B.F.L. Ward, and Z. Wąs, Comp. Phys. Comm. **79** (1994) 503.
- [54] S. Jadach, Z. Wąs, R. Decker, and J.H. Kühn, Comp. Phys. Comm. **76** (1993) 361.
- [55] R. Brun et al., **CERN-DD/EE/84-1** (1989).
- [56] T. Sjöstrand, Comp. Phys. Comm. **82** (1994) 74.
- [57] M. Bohm, A. Denner, and W. Hollik, Nucl. Phys. **B304** (1988) 687.
- [58] F.A. Berends, R. Kleiss, and W. Hollik, Nucl. Phys. **B304** (1988) 712.
- [59] R. Battacharya, J. Smith, and G. Grammer, Phys. Rev. **D15** (1977) 3267.
- [60] J. Smith, J.A.M. Vermaseren, and G. Grammer, Phys. Rev. **D15** (1977) 3280.
- [61] OPAL Collaboration, J. Allison et al., Zeit. f. Physik **C66** (1995) 31.
- [62] OPAL Collaboration, OPAL Phys. Note **PN304** (1997).
- [63] V. Blobel, **DESY-84/118** (1984).
- [64] J.H. Kühn and A. Santamaria, Zeit. f. Physik **C48** (1990) 445.
- [65] OPAL Collaboration, K. Ackerstaff et al., Zeit. f. Physik **C75** (1997) 593.
- [66] U.C. Müller, Doktorarbeit **BONN-IR-96-18** (1996).
- [67] W. Mader, Diplomarbeit **BONN-IB-98-19** (1998).
- [68] J. Wess and B. Zumino, Phys. Lett. **B37** (1971) 95.
- [69] S. Weinberg, Phys. Rev. **112** (1958) 1375.
- [70] Y. Tsai, Phys. Rev. **D4** (1971) 2821.
- [71] M. Girone and M. Neubert, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 3061.
- [72] ALEPH Collaboration, R. Barate et al., Eur. Phys. J. **C4** (1998) 409.
- [73] G. Rodrigo, A. Pich, and A. Santamaria, **FTUV-97-80** (1997).
- [74] LEP Collaborations ALEPH, DELPHI, L3, OPAL, LEP Electroweak Working Group and SLD Heavy Flavor Group, D. Abbaneo et al., **CERN-PPE-97-154** (1997).
- [75] A. Pich, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **C55** (1997) 3.
- [76] M. Schmelling, **MPI-H-V39-1996** (1996), Talk given at 28th International Conference on High-energy Physics (ICHEP 96), Warsaw, Poland, 25-31 Jul 1996.
- [77] S. Bethke, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **B64** (1998) 54.
- [78] CLEO Collaboration, T. Coan et al., Phys. Lett. **B356** (1995) 580.
- [79] ALEPH Collaboration, D. Buskulic et al., Phys. Lett. **B307** (1993) 209.
- [80] ALEPH Collaboration, R. Barate et al., Z. Phys. **C76** (1997) 15.

- 
- [81] T. Das, V.S. Mathur, and S. Okubo, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 859.
- [82] NA7 Collaboration, S.R. Amendolia et al., Nucl. Phys. **B277** (1986) 168.
- [83] T. Das, G.S. Guralnik, V.S. Mathur, F.E. Low, and J.E. Young, Phys. Rev. Lett. **18** (1967) 759.
- [84] M.V. Terent'ev, Sov. J. Nucl. Phys. **16** (1973) 87.
- [85] V. Kartvelishvili, M. Margvelashvili, and G. Shaw, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **A54** (1997) 309.
- [86] OPAL Collaboration, K. Ackerstaff et al., **CERN-EP-98-102** (1998).

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen ein herzliches „Dankeschön“ sagen, die mich während der letzten drei Jahre bei meiner Doktorarbeit unterstützt haben.

- Daß die Arbeit fast immer Spaß gemacht hat und jederzeit ein Ansprechpartner nicht nur für physikalische Fragen da war, ist allen Mitgliedern der OPAL/ATLAS/FAUST-Gruppe in Bonn zu verdanken. Die offene und herzliche Atmosphäre habe ich sehr genossen.
- Meinem „Roommate“ Rainer Bartoldus danke ich für unschätzbare Diskussionen über physikalisches und nicht-physikalisches. Von „Schnitzi“ bis zum „syntonischen Komma“ reichten die Übungsaufgaben des Zimmers 309, die ich sehr vermissen werde.
- Ein herzliches „Wieviel?“ an den Captain der Sternenflotte Norbert Tesch und die Enterprise Cellistin Ute Carina Müller. Wenn Ihr mal Ponal braucht oder so, dann wendet Euch vertrauensvoll an mich.
- Achim Stahl hat mir nicht nur Mut gemacht, dieses Thema zu verfolgen, sondern war immer zu Diskussionen und Anregungen in Bezug auf die Arbeit bereit. Hierfür und für das Korrekturlesen der Arbeit ein herzliches Dankeschön an Dich.
- Auch bei Michael Kobel möchte ich mich für das Korrekturlesen der Arbeit herzlich bedanken.
- Bei Norbert Wermes möchte ich mich dafür bedanken, daß ich trotz anfänglicher Skepsis dieses Thema bearbeiten durfte.
- Frank Scharf alias Commander Data hat als wandelndes Lexikon stets die richtige Zahl im Kopf gehabt und hat mit Christoph Hartman, Gabriele Zech und Achim Stahl, die mit mir dem nachdienstlichen Doppelkopfkampfsport oder dem Squashen frönten, für den nötigen Ausgleich zum physikalischen Alltag gesorgt.
- Ohne die Diskussionen mit Andreas Höcker hätte ich viele der theoretischen Hürden dieser Arbeit nicht genommen. Die Zusammenarbeit war dabei nicht nur außerordentlich lehrreich, sondern immer auch amüsant. Vielen Dank dafür.
- Meinen Eltern, Frauke und Dieter, danke ich besonders für die Unterstützung während des Studiums.