



-
1. Einführung
 2. Beschleuniger
 3. Detektoren
 4. **Bewegungsgleichungen und Symmetrien**
 5. Das Quark-Modell und die CKM-Matrix
 6. CP-Verletzung im Standardmodell
 7. Proton- und Photonstruktur
 8. Elektroschwache Präzisionsmessungen
 9. Das Higgs-Boson
 10. Neutrino-Massen und Neutrino-Oszillationen



Definitionen

- Es gibt kontravariante, x^μ , und kovariante, x_μ , Vierer-Vektoren mit $\mu = 0, 1, 2, 3$.

$$p^\mu \equiv \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}, \quad \partial^\mu \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\nabla \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$$

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu \quad \text{mit:} \quad g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Metrischer Tensor}$$

$$\Rightarrow p_\mu \equiv \begin{pmatrix} E \\ -\vec{p} \end{pmatrix}, \quad \partial_\mu \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \nabla \end{pmatrix}$$

- Skalarprodukt: $a \cdot b = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu \equiv a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$

- Beispiele: $p \cdot p = p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m_0^2, \quad \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \equiv \square$

Betragsquadrate von Vierer-Vektoren sind invariant unter Lorentztransformationen.



Operatoren und Kommutatoren

– Der Operator A überführt eine Funktion Φ eines Funktionenraumes

in eine andere Funktion Φ' : $\Phi' = A\Phi$

– Die Summe zweier Operatoren: $\Phi' = (A + B)\Phi = A\Phi + B\Phi$

– Im allgemeinen ist das Produkt zweier Operatoren nicht vertauschbar

$$\Phi' = (A \cdot B)\Phi = A \cdot (B\Phi) \neq B \cdot (A\Phi)$$

– Dies legt die Definition des Kommutators nahe: $[A, B] \equiv AB - BA$

– Wenn der Kommutator verschwindet $[A, B] = 0$, ist die Reihenfolge der Anwendung egal, da $AB = BA$.

– Ein Beispiel: $A = f(x) \equiv f$, $B = \frac{\partial}{\partial x}$

– Die Berechnung erfolgt durch Anwendung auf eine Funktion

$$\begin{aligned} [A, B] \Phi &= f \frac{\partial}{\partial x} \Phi - \frac{\partial}{\partial x} f \Phi = f \frac{\partial}{\partial x} \Phi - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \Phi - f \frac{\partial}{\partial x} \Phi \\ &\Rightarrow \left[f(x), \frac{\partial}{\partial x} \right] = -\frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned}$$

Kommutatoren sind sehr wichtige Hilfsmittel der Quantenmechanik.



Eigenwertgleichung und wichtige Operatoren

- Falls die Funktion Φ Eigenfunktion zum Operator \hat{E} mit dem Eigenwert E ist gilt:

$$\hat{E} \Phi = E \Phi$$

- **Beispiel:** $\Phi = \Phi_0 e^{-i(Et - \vec{p}\vec{r})}$ und $\hat{E} \equiv i \frac{\partial}{\partial t}$ mit: $\hbar = c = 1$

$$\Rightarrow \hat{E} \Phi = i(-iE) \Phi = E \Phi$$

- Die monochromatische ebene Welle Φ ist Eigenfunktion zum Energie-Operator mit der Teilchen-Energie als Eigenwert.

- Analog gilt: $\hat{p} \equiv -i\nabla \Rightarrow \hat{p} \Phi = (-i)(-i)(-\vec{p}) \Phi = \vec{p} \Phi$

- Der vierdimensionale Energie-Impuls-Operator ist damit': $\hat{p}^\mu \equiv (i \frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla) = i\partial^\mu$.

- Diese Operatoren, zusammen mit der nicht-relativistischen Energiebeziehung,

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m},$$

führen auf die Schrödinger-Gleichung für ein nicht-relativistisches, freies Teilchen:

$$0 = \left(E - \frac{p^2}{2m} \right) \Phi = \left(\hat{E} - \frac{\hat{p}^2}{2m} \right) \Phi = \left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} \Delta \right) \Phi$$



S-Matrix Formalismus

- Die S-Matrix beschreibt den Übergang eines Anfangszustands $i = initial$ in einen Endzustand $f = final$.
- Zustandsvektor im Hilbert-Raum: $|i\rangle = |\text{Ort, Impuls, Masse, Spin, Ladung, ...}\rangle$
- Transformationen der Zustände: $S|i\rangle \equiv |i'\rangle$, und $\langle i'| \equiv \langle i|S^\dagger$, $\langle bra | \dots | ket \rangle$
Matrizelemente: $S_{fi} = \langle f|S|i\rangle = \langle f|i'\rangle$
Erhaltung der Norm: $\langle i'|i'\rangle = \langle i|S^\dagger S|i\rangle = \langle i|i\rangle \Leftrightarrow$ Unitarität von S.
Unitarität: $SS^\dagger = 1$ mit $S_{fi}^\dagger = S_{if}^* \Leftrightarrow S^\dagger = S^{-1}$
Unitäre Transformation: $|\tilde{i}\rangle \equiv U|i\rangle$ und $\tilde{S} \equiv USU^\dagger$
Invarianz unter U : $\langle \tilde{f}|\tilde{S}|\tilde{i}\rangle = \langle f|U^\dagger USU^\dagger U|i\rangle = \langle f|S|i\rangle$
- Zusammen mit der goldenen Regel der Quantenmechanik erlaubt die S-Matrix die Berechnung von Wirkungsquerschnitten, z.B. gilt für $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$:

$$\sigma = \int \frac{1}{2S_{12}} |T_{fi}|^2 dL$$

mit dL = Phasenraumelement der auslaufenden Teilchen und $T_{fi} \propto S_{fi}$.

Die Untersuchung der Symmetrien der S-Matrix gibt Einblick in die Wechselwirkungen.



S-Matrix und Noether-Theorem

- **Untersuche S-Matrizen mit:** $\tilde{S} \equiv USU^\dagger = S \Leftrightarrow SU = US \Leftrightarrow [S, U] = 0$
- **Trafo:** $U \equiv 1 + id\alpha F$, $d\alpha =$ infinitesimale Verschiebung, $F =$ Generator der Trafo.
damit: $1 = UU^\dagger = (1 + id\alpha F)(1 - id\alpha F^\dagger) = 1 + id\alpha(F - F^\dagger) + d\alpha^2 FF^\dagger$
Dies gilt für beliebige $d\alpha$, also muss F hermitesch sein, $F = F^\dagger$.
- **Aus $0 = [S, U] = [S, 1 + id\alpha F]$ folgt $[S, F] = 0$, und damit ergibt sich**
 $\langle f | [S, F] | i \rangle = \langle f | SF | i \rangle - \langle f | F^\dagger S | i \rangle = [\eta_F(i) - \eta_F(f)] S_{fi} = 0$,
 $\Leftrightarrow \eta_F(i) = \eta_F(f)$ für Eigenzustände von F . Das bedeutet, wenn der Kommutator von S mit einem hermiteschen Operator F verschwindet, ist η_F eine Erhaltungsgröße!
- **Beispiel Verschiebung in z :** $U \equiv 1 + idzF_z$ mit $d\alpha = dz$
$$U|z\rangle \equiv |z + dz\rangle = |z\rangle + idzF_z|z\rangle$$
$$\Rightarrow F_z|z\rangle = \frac{-i}{dz}(|z + dz\rangle - |z\rangle) = -i\frac{\partial}{\partial z}|z\rangle = \hat{p}_z|z\rangle$$
 - Aus der **räumlichen Translationsinvarianz** folgt die **Impulserhaltung** !
 - Aus der **zeitlichen Translationsinvarianz** folgt die **Energieerhaltung** !
 - Aus der **Rotationsinvarianz** folgt die **Drehimpulserhaltung** !

Noether-Theorem: Für jede kontinuierliche Symmetrie existiert ein Erhaltungssatz.



Lagrange-Formalismus - nicht relativistisch klassisch

- Die Klassische Wirkung: $S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q})$, $L =$ Lagrange-Funktion,
mit der generalisierten Koordinate $q(t)$ und der gen. Geschwindigkeit $\dot{q}(t) = \frac{dq}{dt}$.
- Variationsprinzip: $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}) \equiv 0$ mit den Zwangsbedingungen $\delta q(t_{1,2}) \equiv 0$.

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) \delta q + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta \dot{q} \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q$$

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta \dot{q} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_1^2 - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q$$

- Das Resultat ist die Lagrange-Gleichung:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

- Beispiel: Ein Teilchen im Potential $V(x)$: $L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)$

$$q = x \quad \text{und} \quad \dot{q} = \dot{x} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} m \dot{x} = m \ddot{x} \end{array} \right\} F = m \ddot{x}$$

Der Lagrange-Formalismus liefert die Bewegungsgleichung.



Lagrange-Formalismus - relativistisch quantenmechanisch

- **Die Wirkung:** $S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)) = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x))$
- **Variationsprinzip:** $\delta S = \delta \int d^4x \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)) \equiv 0$
- **Eine analoge Rechnung liefert als Resultat die Lagrange-Gleichung**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi(x))} \right) = 0$$

- **Beispiel: Ein relativistisches spinloses freies Teilchen der Masse m**

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2} \left[(\partial^\mu \Phi(x))^2 - m^2 \Phi^2(x) \right]$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi(x)} &= -m^2 \Phi(x) \\ \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi(x))} \right) &= \partial_\mu \partial^\mu \Phi(x) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Die Klein-Gordon-Gleichung} \\ &(\square + m^2) \Phi(x) = 0 \end{aligned}$$

Wieder liefert der Lagrange-Formalismus die Bewegungsgleichung.



Die Klein-Gordon-Gleichung

– Die Klein-Gordon-Gleichung $\boxed{(\square + m^2) \Phi(x) = 0}$ erfüllt den relativistischen Energiesatz.

$$0 = (E^2 - p^2 - m^2) \Phi(x) = \left[\left(i \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - (-i \nabla)^2 - m^2 \right] \Phi(x) = (\square + m^2) \Phi(x) \quad \checkmark$$

– Frage: **Ist dies die Bewegungsgleichung relativistischer, geladener, massiver Teilchen mit Spin?**

- 1) Die Gleichung ist linear und homogen, und damit ist die Linearkombination $\Phi = \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2$ Lösung der Gleichung, falls Φ_1 und Φ_2 Lösungen sind. \checkmark
- 2) Allerdings ist sie quadratisch in der Zeit. Damit ist die Forderung, dass das physikalische System durch die Wellenfunktion zur Zeit $t = 0$ bestimmt sein soll, verletzt. Die Kenntnis der Wellenfunktion zur Zeit Null reicht nicht aus, um die Entwicklung zu bestimmen. \ominus
- 3) Zwei Ladungszustände können durch die Wahl einer komplexen Wellenfunktion $\Phi^*(x)$ im Real- und Imaginärteil der Wellenfunktion realisiert werden. \checkmark
- 4) Die Freiheitsgrade sind Energie und Impuls, und es ist kein Platz für den Spin. \ominus

Antwort: **Nein**

Wir müssen nach einer Gleichung suchen, die linear in den Ableitungen ist.



Die Dirac-Gleichung

– Aus der Lagrange-Dichte: $\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi(x)$ mit $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger(x)\gamma^0$ und

der Lagrange-Gleichung: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi(x))} \right) = 0$

folgt die Dirac-Gleichung: $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi(x) = 0$

– 4-komponentiger Spinor: $\Psi(x) \Rightarrow$ Die DG beschreibt vier Freiheitsgrade

– Die 4x4- γ Matrizen: $\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$ hängen von den

2x2-Pauli Matrizen: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ab.

$I \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $0 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Die Dirac-Gleichung ist invariant unter Lorentz-Transformationen.



Eine spezielle Lösung der Dirac-Gleichung

Betrachte ein ruhendes Teilchen: $\vec{p} = 0$

Damit ergibt sich für die Dirac-Gleichung: $(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - m) \Psi(x) = 0$

Dieses System hat vier linear unabhängige Lösungen: Ψ_i mit $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}, \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \quad \text{mit} \quad \hat{E} \Psi_{1,2} = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{1,2} = +m \Psi_{1,2}$$
$$\Psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+imt}, \quad \Psi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+imt}, \quad \text{mit} \quad \hat{E} \Psi_{3,4} = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{3,4} = -m \Psi_{3,4}$$

Die vier Freiheitsgrade:

$$|\Psi_1\rangle = |E = +m, \uparrow\rangle, \quad |\Psi_2\rangle = |E = +m, \downarrow\rangle,$$
$$|\Psi_3\rangle = |E = -m, \uparrow\rangle, \quad |\Psi_4\rangle = |E = -m, \downarrow\rangle.$$

Die Dirac-Gleichung beschreibt Teilchen/Antiteilchen und Spin up/down.



Eichinvarianz der Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} (1) \quad \nabla \vec{B} &= 0 & \Rightarrow \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ (2) \quad \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \Rightarrow 0 &= \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \equiv \nabla \times \nabla(-V) \\ (3) \quad \nabla \vec{E} &= \rho \\ (4) \quad \nabla \times \vec{B} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

\Downarrow
 $\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Eichtransformation: $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda$ und $V' = V - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$ mit $\Lambda = \Lambda(t, \vec{x})$

Felder invariant da: $\left[\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right] = 0$ und $\nabla \times \nabla \Lambda = 0$, für alle Λ

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \nabla \Lambda = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\nabla V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla V + \nabla \frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Lambda = \vec{E}$$

Ladungserhaltung: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{j} = 0$

Aus (3) und (4): $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{j} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \vec{E} + \nabla (\nabla \times \vec{B}) - \nabla \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0.$

Die Eichinvarianz der Maxwellgleichungen hat weit reichende Konsequenzen.



Kovariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen

- Wegen der Lorentz-Invarianz der MG bietet sich eine kovariante Formulierung an.

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vektorpotential: $A^\mu \equiv (V, \vec{A})$ und Eichtransformation: $A^{\mu'} = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$

- Die inhomogene Maxwellgleichungen ergeben sich aus

$$\nabla \vec{E} = \rho, \quad \text{und} \quad \nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{mit} \quad j^\nu \equiv (\rho, \vec{j}) \quad \text{zu:}$$

$$j^\nu = \partial_\mu F^{\mu\nu} = (\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu) = \square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu)$$

- Die Ladungserhaltung:

$$\partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

- Die Wellengleichung für ein masseloses freies Photon $j^\nu \equiv 0$ in Lorentz-Eichung

$$\partial_\mu A^\mu \equiv 0 \text{ lautet:}$$

$$\square A^\nu = 0$$

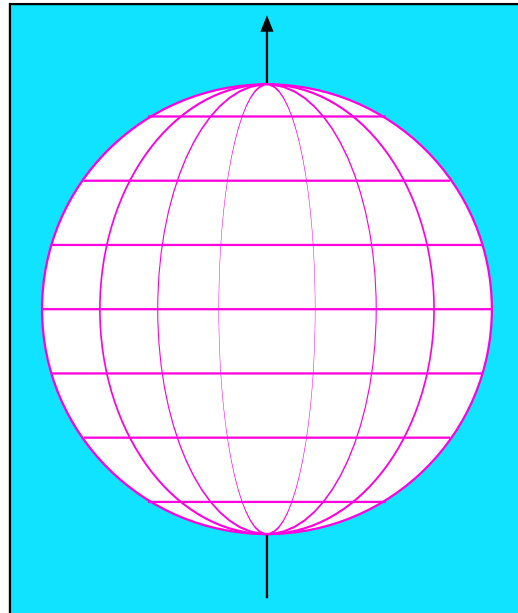
KG-Gleichung mit $m = 0$.

Die kovariante Formulierung ist für relativistische Rechnungen besser geeignet.

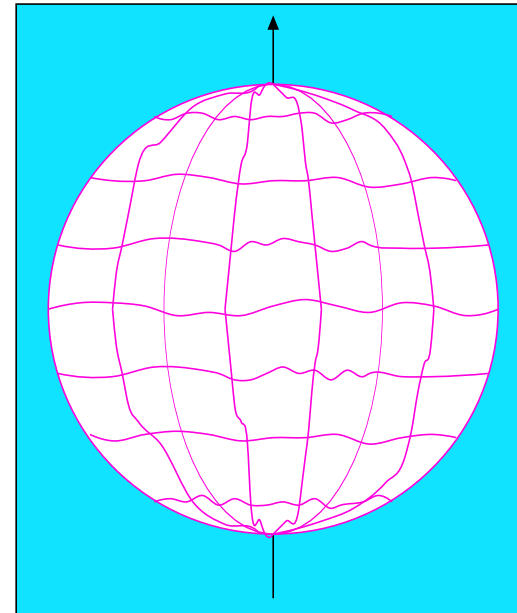


Eichtransformationen freier Felder

Global: $\Phi' = e^{i\Lambda} \Phi$



Lokal: $\Phi' = e^{i\Lambda(x)} \Phi$



Invarianz \Rightarrow

Ladungserhaltung

Wechselwirkung mit Photonfeld

Die Forderung nach lokaler Eichinvarianz erzwingt ein masseloses Eichboson.



Globale Eichtransformation

- Physikalische Observablen sind Erwartungswerte von Operatoren \hat{O} und werden durch $\langle \hat{O} \rangle = \langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle$ berechnet, z.B. $\langle \hat{p} \rangle = \langle \Psi | \hat{p} | \Psi \rangle = p \langle \Psi | \Psi \rangle = p$.
- Eine Globale Phasentransformation: $|\Psi'\rangle = e^{i\Lambda} |\Psi\rangle$
- Invarianz der Erwartungswerte: $\langle \Psi' | \hat{O} | \Psi' \rangle = \langle \Psi | e^{-i\Lambda} \hat{O} e^{i\Lambda} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle$
- Auch die Bewegungsgleichungen sind invariant.
- Beispiel Dirac-Gleichung:
$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi' = m\Psi'$$
$$i\gamma^\mu \partial_\mu e^{i\Lambda} \Psi = m e^{i\Lambda} \Psi$$
$$e^{i\Lambda} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi = e^{i\Lambda} m\Psi$$
$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi = m\Psi \quad \checkmark$$
- Betrachte den Ladungsoperator: $Q|\Psi\rangle = q|\Psi\rangle$ mit $U \equiv e^{i\Lambda Q}$.
Wegen $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \dots$ ist $e^{i\Lambda Q} = 1 + i\Lambda Q + \dots$
Anwendung auf $|\Psi\rangle$ liefert $e^{i\Lambda Q} |\Psi\rangle = e^{i\Lambda q} |\Psi\rangle$ und wegen $[S, U] = 0$ folgt die Ladungserhaltung: $[S, Q] = 0$.

Die globale Eichinvarianz führt zur Erhaltung der Ladung



Lokale Eichtransformation

– Eine lokale Eichtransformation: $\Psi' = e^{iq\Lambda(x)} \Psi$

In Dirac-Gleichung: $i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi' = m\Psi'$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu [e^{iq\Lambda(x)} \Psi] = m [e^{iq\Lambda(x)} \Psi]$$

$$e^{iq\Lambda(x)} i\gamma^\mu [\partial_\mu + iq(\partial_\mu \Lambda(x))] \Psi = e^{iq\Lambda(x)} m\Psi$$

– Der Term $iq\partial_\mu \Lambda(x)$ erinnert an die Eichfreiheit der Maxwell-Gleichungen, deswegen versucht man einen Ansatz für ein geladenes Teilchen im Feld.

$$\left. \begin{array}{l} E \rightarrow E + qV \\ \vec{p} \rightarrow \vec{p} + q\vec{A} \end{array} \right\} P_\mu = p_\mu + qA_\mu \Rightarrow D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu \quad \text{da} \quad p_\mu = i\partial_\mu.$$
$$D'_\mu = \partial_\mu - iqA'_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu - iq\partial_\mu \Lambda(x)$$

– In Dirac-Gleichung: $i\gamma^\mu D'_\mu e^{iq\Lambda(x)} \Psi = m e^{iq\Lambda(x)} \Psi$

$$e^{iq\Lambda(x)} i\gamma^\mu [\partial_\mu + iq(\partial_\mu \Lambda(x)) - iqA_\mu - iq(\partial_\mu \Lambda(x))] \Psi = e^{iq\Lambda(x)} m\Psi$$

$$e^{iq\Lambda(x)} i\gamma^\mu D_\mu \Psi = e^{iq\Lambda(x)} m\Psi$$

– Invarianz der Dirac-Gleichung erreicht man nur mit den simultanen Transformationen

$$\Psi' = e^{iq\Lambda(x)} \Psi \quad \text{und} \quad D'_\mu = D_\mu - iq\partial_\mu \Lambda(x).$$

Die lokale Eichinvarianz erzwingt die Wechselwirkung mit dem Photonfeld.



Die Paritätstransformation

– Spiegelung am Ursprung: $|\vec{r}'\rangle = P|\vec{r}\rangle = -|\vec{r}\rangle$ und $|t'\rangle = P|t\rangle = |t\rangle$.

– Das Transformationsverhalten einiger Variablen:

Skalar: $P|E\rangle = |E\rangle$, Axialvektor: $P|\vec{L}\rangle = P|\vec{r} \times \vec{p}\rangle = (-1)^2|\vec{L}\rangle = |\vec{L}\rangle$

Vektor: $P|\vec{r}\rangle = -|\vec{r}\rangle$, Pseudoskalar: $P|\lambda\rangle = P|\frac{\vec{s}\vec{p}}{|\vec{p}|}\rangle = -|\lambda\rangle$,

Kugelwellenfunktionen: $PY_l^m(\theta, \phi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \phi)$

– Teilchen können Eigenzustände zur Parität sein.

Es gilt: $P|i\rangle = \eta_P(i)|i\rangle$ und $P^2|i\rangle = \eta_P(i)\eta_P(i)|i\rangle = |i\rangle \Rightarrow \eta_P(i) = \pm 1$

– Für Fermionen und Antifermionen wird $\eta_P(f) = 1$ und $\eta_P(\bar{f}) = -1$ festgelegt.

– Die Parität ist eine multiplikative Quantenzahl.

– Beispiele zusammengesetzter Systeme:

Baryonen ($l = 0$): $P|qqq\rangle = 1^3|qqq\rangle = +1|qqq\rangle$

Antibaryonen ($l = 0$): $P|\bar{q}\bar{q}\bar{q}\rangle = (-1)^3|\bar{q}\bar{q}\bar{q}\rangle = -1|\bar{q}\bar{q}\bar{q}\rangle$

Meson ($l \neq 0$): $P|q\bar{q}\rangle = 1 \cdot (-1) \cdot (-1)^l|q\bar{q}\rangle = (-1)^{l+1}|q\bar{q}\rangle$

Die Parität ist nicht in allen Wechselwirkungen erhalten.



Die Ladungskonjugation oder C-Parität

- Die Ladungskonjugation $C|e^- \rangle = \eta_C(e^-)|e^+ \rangle$ transformiert Teilchen in Antiteilchen.
- Man definiert für Fermionen, $\eta_C(f) = 1$, und für Antifermionen, $\eta_C(\bar{f}) = 1$.
- Die C-Parität ist eine multiplikative Quantenzahl.
- In elektromagnetischen Wechselwirkungen ist η_C eine Erhaltungsgröße, $[S, C] = 0$.
- Ungeladene Teilchen können Eigenzustände zur C-Parität sein.
- Die C-Parität des **Photons** und des **neutralen Pions**, π^0 :
 - 1) Da das γ an die Ladung koppelt gilt für die Amplitude: $\langle e^- \gamma |S| e^- \rangle = -\langle e^+ \gamma |S| e^+ \rangle$.
 - 2) $\langle e^- \gamma |S| e^- \rangle = \langle e^- \gamma |C^\dagger S C| e^- \rangle = \eta_C^2(e^-)\eta_C(\gamma)\langle e^+ \gamma |S| e^+ \rangle = \eta_C(\gamma)\langle e^+ \gamma |S| e^+ \rangle$
 $\eta_C(\gamma) = -1$ und für das π^0 gilt: $C|\pi^0 \rangle = C|2\gamma \rangle = (-1)^2|2\gamma \rangle$, $\eta_C(\pi^0) = +1$
- Wegen der Erhaltung der C-Parität existiert der Zerfall $\pi^0 \rightarrow 3\gamma$ also nicht.
- Die Erhaltung der C-Parität ist eine nützliche Eigenschaft z.B. im Zerfall $\eta \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^0$
Es gilt: $\langle \pi^- \pi^+ \pi^0 |S| \eta \rangle = \langle \pi^- \pi^+ \pi^0 |C^\dagger S C| \eta \rangle = \eta_C^2(\eta)\langle \pi^+ \pi^- \pi^0 |S| \eta \rangle$
Der Zustand wird in sich selbst überführt. Dies bedeutet aber, dass die Winkelverteilung von π^+ und π^- identisch sein muss, was experimentell bestätigt wurde.

Auch die C-Parität ist nicht in allen Wechselwirkungen erhalten.



Die Zeitumkehr

- Die Zeitumkehr dreht den zeitlichen Ablauf einer Reaktion um. Für ein Elementarereignis folgt also: $T|1 + 2 \rightarrow 3 + 4\rangle = |3 + 4 \rightarrow 1 + 2\rangle$
- Zeitumkehrtrafo: $T|\vec{r}, t\rangle \equiv |\vec{r}, -t\rangle$
 - Beispiele:
 - Impuls: $T|\vec{p}\rangle = -|\vec{p}\rangle$ da $\vec{p} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
 - Drehimpuls: $T|\vec{L}\rangle = T|m\vec{r} \times \vec{p}\rangle = -|\vec{L}\rangle$
 - Helizität: $T|\lambda\rangle = |\lambda\rangle$
- Makroskopisch gilt T-Invarianz nur für Ereignisse ohne Entropieänderung. Das Zerschlagen einer Flasche lässt sich auch durch Zeitumkehr nicht reparieren.
- Mikroskopisch führt das Studium der Zeitumkehr-Transformation zum Prinzip des detaillierten Gleichgewichts.
- Dies führt zum Beispiel für $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ auf die folgende Relation:

$$\frac{\frac{d\sigma}{d\Omega}(1+2 \rightarrow 3+4)}{\frac{d\sigma}{d\Omega}(3+4 \rightarrow 1+2)} = \frac{|p_3|^2 (2J_{(3)}+1)(2J_{(4)}+1)}{|p_1|^2 (2J_{(1)}+1)(2J_{(2)}+1)}, \quad \text{mit} \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}.$$

Die Zeit ist und bleibt eines der schwierigsten Konzepte der Physik.



Die Invarianz der Wechselwirkungen

Wechselwirkung / Symmetrie	C	P	CP	CPT
stark	✓	✓	✓	✓
elektromagnetisch	✓	✓	✓	✓
schwach	—	—	—	✓

- In der schwachen Wechselwirkung (sWW) gibt es sowohl C- als auch P-Verletzung.
- An der sWW nehmen nur linkshändige Teilchen teil $\vec{s} \uparrow \downarrow \vec{p}$ bzw. $\lambda = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = -|\vec{s}|$.

Ein Neutrino: $|\nu\rangle \equiv |\nu, \lambda = -\frac{1}{2}\rangle$

P-Verletzung: $P|\nu, \lambda = -\frac{1}{2}\rangle = |\nu, \lambda = +\frac{1}{2}\rangle$ existiert nicht.

C-Verletzung: $C|\nu, \lambda = -\frac{1}{2}\rangle = |\bar{\nu}, \lambda = -\frac{1}{2}\rangle$ existiert nicht.

CP-Transformation: $CP|\nu, \lambda = -\frac{1}{2}\rangle = |\bar{\nu}, \lambda = +\frac{1}{2}\rangle$ existiert.

- Trotzdem ist CP in der sWW verletzt. Dies wurde in Kaon- und B-Systemen gemessen. Eine ausführliche Diskussion der CP-Verletzung folgt später.
- Die CPT-Invarianz ist ein Eckpfeiler der Quantenfeldtheorie. Sie hat weit reichende Bedeutung, z.B. gilt damit $m_f = m_{\bar{f}}$ und $\tau_f = \tau_{\bar{f}}$.

Die Symmetrien der Wechselwirkungen sind das Objekt vieler Untersuchungen.



Zusammenfassung

- Aus der Erhaltung der Norm $\langle i | i \rangle = 1$ folgt, dass die S-Matrix, die die Übergänge eines Anfangszustands $i = \textit{initial}$ in einen Endzustand $f = \textit{final}$ beschreibt, $\langle f | S | i \rangle$, unitär sein muss.
- Kommutatoren $[S, O] = SO - OS$ sind sehr wichtige Hilfsmittel der Quantenmechanik. Eigenwerte von hermiteschen Operatoren, die mit der S-Matrix vertauschen, sind Erhaltungsgrößen.
- Das Noether-Theorem, 'Für jede kontinuierliche Symmetrie existiert ein Erhaltungssatz.', ist ein wichtiges Hilfsmittel zum Studium von Symmetrien.
- Der Lagrange-Formalismus liefert die Bewegungsgleichung, er führt zum Beispiel auf die Dirac-Gleichung.
- Die Dirac-Gleichung ist invariant unter Lorentz-Transformationen und beschreibt massive, relativistische Fermionen / Antifermionen mit halbzahligem Spin, up / down.
- Die Eichinvarianz der Feldtheorie ist fundamental. Die globale Eichinvarianz führt zur Erhaltung der Ladung und die lokale Eichinvarianz erzwingt die Wechselwirkung mit dem Photonfeld.
- C-, P- und T-Invarianz sind nicht in allen Wechselwirkungen gegeben, aber die CPT-Invarianz ist ein Eckpfeiler der Quantenfeldtheorie und aus ihr folgt $m_f = m_{\bar{f}}$ und $\tau_f = \tau_{\bar{f}}$.