1. Einführung
2. Beschleuniger
3. Detektoren
4. Bewegungsgleichungen und Symmetrien
5. Das Quark-Modell und die CKM-Matrix
6. CP-Verletzung im Standardmodell
7. Proton- und Photonstruktur
8. Elektroschwache Präzisionsmessungen
9. Das Higgs-Boson
10. Neutrino-Massen und Neutrino-Oszillationen

Definitionen

– Es gibt kontravariante, x^μ, und kovariante, x_μ, Vierer-Vektoren mit $\mu = 0, 1, 2, 3$.

$$p^\mu \equiv \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}, \qquad \partial^\mu \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\nabla \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$$

$$a_\mu = g_{\mu\nu}\, a^\nu \quad \text{mit:} \quad g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Metrischer Tensor

$$\Rightarrow \quad p_\mu \equiv \begin{pmatrix} E \\ -\vec{p} \end{pmatrix}, \qquad \partial_\mu \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \nabla \end{pmatrix}$$

– Skalarprodukt: $a \cdot b = a^\mu\, b_\mu = a_\mu\, b^\mu \equiv a_0\, b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$

– Beispiele: $p \cdot p = p^\mu\, p_\mu = E^2 - \vec{p}^{\,2} = m_0^2$, $\qquad \partial^\mu\, \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \equiv \Box$

$\boxed{\text{Betragsquadrate von Vierer-Vektoren sind invariant unter Lorenztransformationen.}}$

Operatoren und Kommutatoren

– **Der Operator A überführt eine Funktion Φ eines Funktionenraumes in eine andere Funktion Φ':** $\Phi' = A\Phi$

– **Die Summe zweier Operatoren:** $\Phi' = (A + B)\Phi = A\Phi + B\Phi$

– **Im allgemeinen ist das Produkt zweier Operatoren nicht vertauschbar**

$$\Phi' = (A \cdot B)\Phi = A \cdot (B\Phi) \neq B \cdot (A\Phi)$$

– **Dies legt die Definition des Kommutators nahe:** $[\, A, B\,] \equiv AB - BA$

– **Wenn der Kommutator verschwindet** $[\, A, B\,] = 0,$ **ist die Reihenfolge der Anwendung egal, da** $AB = BA$**.**

– **Ein Beispiel:** $A = f(x) \equiv f, \quad B = \frac{\partial}{\partial x}$

– **Die Berechnung erfolgt durch Anwendung auf eine Funktion**

$$[\, A, B\,]\,\Phi = f\frac{\partial}{\partial x}\Phi - \frac{\partial}{\partial x}f\Phi = f\frac{\partial}{\partial x}\Phi - (\frac{\partial f}{\partial x})\Phi - f\frac{\partial}{\partial x}\Phi$$

$$\Rightarrow \left[\, f(x), \frac{\partial}{\partial x}\,\right] = -\frac{\partial f}{\partial x}$$

Kommutatoren sind sehr wichtige Hilfsmittel der Quantenmechanik.

Eigenwertgleichung und wichtige Operatoren

– **Falls die Funktion Φ Eigenfunktion zum Operator $\hat{E}$ mit dem Eigenwert E ist gilt:**

$$\hat{E}\,\Phi = E\,\Phi$$

– **Beispiel:** $\Phi = \Phi_0 e^{-i(Et-\vec{p}\vec{r})}$ **und** $\hat{E} \equiv i\frac{\partial}{\partial t}$ **mit:** $\hbar = c = 1$

$$\Rightarrow\ \hat{E}\,\Phi = i(-iE)\,\Phi = E\,\Phi$$

– **Die monochromatische ebene Welle Φ ist Eigenfunktion zum Energie-Operator mit der Teilchen-Energie als Eigenwert.**

– **Analog gilt:** $\hat{p} \equiv -i\nabla \Rightarrow \hat{p}\,\Phi = (-i)(-i)(-\vec{p})\,\Phi = \vec{p}\,\Phi$

– **Der vierdimensionale Energie-Impuls-Operator ist damit':** $\hat{p}^\mu \equiv (i\frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla) = i\partial^\mu$.

– **Diese Operatoren, zusammen mit der nicht-relativistischen Energiebeziehung,**

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m},$$

führen auf die Schrödinger-Gleichung für ein nicht-relativistisches, freies Teilchen:

$$0 = \left(E - \frac{p^2}{2m}\right)\Phi = \left(\hat{E} - \frac{\hat{p}^2}{2m}\right)\Phi = \left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\Delta\right)\Phi$$

S-Matrix Formalismus

– Die S-Matrix beschreibt den Übergang eines Anfangszustands $i = initial$ in einen Endzustand $f = final$.

– Zustandsvektor im Hilbert-Raum: $|\, i \,\rangle = |$ Ort, Impuls, Masse, Spin, Ladung, ... $\rangle$

– Transformationen der Zustände: $S|\, i \,\rangle \equiv |\, i' \,\rangle$, und $\langle\, i' \,| \equiv \langle\, i \,| S^\dagger$, $\langle\, bra \,| \ldots |\, ket \,\rangle$

Matrixelemente: $S_{fi} = \langle\, f \,|S|\, i \,\rangle = \langle\, f \,|\, i' \,\rangle$

Erhaltung der Norm: $\langle\, i' \,|\, i' \,\rangle = \langle\, i \,|S^\dagger S|\, i \,\rangle = \langle\, i \,|\, i \,\rangle \Leftrightarrow$ Unitarität von S.

Unitarität: $SS^\dagger = 1$ mit $S^\dagger_{fi} = S^\star_{if} \quad \Leftrightarrow \quad S^\dagger = S^{-1}$

Unitäre Transformation: $|\, \tilde{i} \,\rangle \equiv U|\, i \,\rangle$ und $\tilde{S} \equiv USU^\dagger$

Invarianz unter U: $\langle\, \tilde{f} \,|\tilde{S}|\, \tilde{i} \,\rangle = \langle\, f \,|U^\dagger USU^\dagger U|\, i \,\rangle = \langle\, f \,|S|\, i \,\rangle$

– Zusammen mit der goldenen Regel der Quantenmechanik erlaubt die S-Matrix die Berechnung von Wirkungsquerschnitten, z.B. gilt für $1 + 2 \longrightarrow 3 + 4$:

$$\boxed{\sigma = \int \frac{1}{2S_{12}} |T_{fi}|^2 dL}$$

mit dL = Phasenraumelement der auslaufenden Teilchen und $T_{fi} \propto S_{fi}$.

Die Untersuchung der Symmetrien der S-Matrix gibt Einblick in die Wechselwirkungen.

S-Matrix und Noether-Theorem

– Untersuche S-Matrizen mit: $\tilde{S} \equiv USU^\dagger = S \quad \Leftrightarrow \quad SU = US \quad \Leftrightarrow \quad [\,S, U\,] = 0$

– Trafo: $U \equiv 1 + id\alpha F, \quad d\alpha =$ infinitesimale Verschiebung, $F =$ Generator der Trafo.

damit: $1 = UU^\dagger = (1 + id\alpha F)\,(1 - id\alpha F^\dagger) = 1 + id\alpha\,(F - F^\dagger) + d\alpha^2 F F^\dagger$

Dies gilt für beliebige $d\alpha$, also muss F hermitesch sein, $F = F^\dagger$.

– Aus $0 = [\,S, U\,] = [\,S, 1 + id\alpha F\,]$ folgt $[\,S, F\,] = 0$, und damit ergibt sich

$\langle\, f\,|\,[\,S, F\,]\,|\,i\,\rangle = \langle\, f\,|SF|\,i\,\rangle - \langle\, f\,|F^\dagger S|\,i\,\rangle = [\eta_F(i) - \eta_F(f)]\,\langle\, f\,|S|\,i\,\rangle = 0\,,$

$\Leftrightarrow \quad \eta_F(i) = \eta_F(f)$ für Eigenzustände von F. Das bedeutet, wenn der Kommutator von S mit einem hermiteschen Operator F verschwindet, ist η_F ist eine Erhaltungsgröße!

– Beispiel Verschiebung in z: $U \equiv 1 + idzF_z$ mit $d\alpha = dz$

$$U|\,z\,\rangle \equiv |\,z + dz\,\rangle = |\,z\,\rangle + idzF_z|\,z\,\rangle$$

$$\Rightarrow F_z|\,z\,\rangle = \frac{-i}{dz}\,(|\,z + dz\,\rangle - |\,z\,\rangle) = -i\frac{\partial}{\partial z}|\,z\,\rangle = \hat{p}_z|\,z\,\rangle$$

  – Aus der räumlichen Translationsinvarianz folgt die Impulserhaltung !
  – Aus der zeitlichen Translationsinvarianz folgt die Energieerhaltung !
  – Aus der Rotationsinvarianz folgt die Drehimpulserhaltung !

Noether-Theorem: Für jede kontinuierliche Symmetrie existiert ein Erhaltungssatz.

Lagrange-Formalismus - nicht relativistisch klassisch

– **Die Klassische Wirkung:** $S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathrm{L}(q,\dot{q}),$ **L = Lagrange-Funktion,**

mit der generalisierten Koordinate $q(t)$ und der gen. Geschwindingkeit $\dot{q}(t) = \frac{dq}{dt}$.

– **Variationsprinzip:** $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathrm{L}(q,\dot{q}) \equiv 0$ **mit den Zwangsbedingungen** $\delta q(t_{1,2}) \equiv 0$.

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial q} \right) \delta q + \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta \dot{q} \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial q} \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q$$

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q \qquad \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta \dot{q} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \, \Big|_1^2 - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q$$

– **Das Resultat ist die Lagrange-Gleichung:** $\boxed{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}} = 0}$

– **Beispiel: Ein Teilchen im Potential V(x):** $\mathrm{L} = \mathrm{T} - \mathrm{V} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)$

$q = x$ **und** $\dot{q} = \dot{x}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial q} &= \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} = F \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} m \dot{x} = m \ddot{x} \end{aligned} \right\} F = m \ddot{x}$$

Der Lagrange-Formalismus liefert die Bewegungsgleichung.

Lagrange-Formalismus - relativistisch quantenmechanisch

– **Die Wirkung:** $S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \, \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)) = \int d^4x \, \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x))$

– **Variationsprinzip:** $\delta S = \delta \int d^4x \, \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)) \equiv 0$

– **Eine analoge Rechnung liefert als Resultat die Lagrange-Gleichung**

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi(x))} \right) = 0}$$

– **Beispiel: Ein relativistisches spinloses freies Teilchen der Masse m**

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2} \left[(\partial^\mu \Phi(x))^2 - m^2 \Phi^2(x) \right]$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi(x)} &= -m^2 \Phi(x) \\ \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi(x))} \right) &= \partial_\mu \partial^\mu \Phi(x) \end{aligned}\right\}$$

Die Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\Box + m^2\right) \Phi(x) = 0$$

Wieder liefert der Lagrange-Formalismus die Bewegungsgleichung.

Die Klein-Gordon-Gleichung

– Die Klein-Gordon-Gleichung $\boxed{\left(\Box + m^2\right)\Phi(x) = 0}$ erfüllt den relativistischen Energiesatz.

$$0 = \left(E^2 - p^2 - m^2\right)\Phi(x) = \left[\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - (-i\nabla)^2 - m^2\right]\Phi(x) = \left(\Box + m^2\right)\Phi(x) \quad \surd$$

– Frage: Ist dies die Bewegungsgleichung relativistischer, geladener, massiver Teilchen mit Spin?

1) Die Gleichung ist linear und homogen, und damit ist die Linearkombination $\Phi = \lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2$ Lösung der Gleichung, falls Φ_1 und Φ_2 Lösungen sind. $\surd$

2) Allerdings ist sie quadratisch in der Zeit. Damit ist die Forderung, dass das physikalische System durch die Wellenfunktion zur Zeit $t = 0$ bestimmt sein soll, verletzt. Die Kenntnis der Wellenfunktion zur Zeit Null reicht nicht aus, um die Entwicklung zu bestimmen. $\ominus$

3) Zwei Ladungszustände können durch die Wahl einer komplexen Wellenfunktion $\Phi^\star(x)$ im Real- und Imaginärteil der Wellenfunktion realisiert werden. $\surd$

4) Die Freiheitsgrade sind Energie und Impuls, und es ist kein Platz für den Spin. $\ominus$

Antwort: Nein

Wir müssen nach einer Gleichung suchen, die linear in den Ableitungen ist.

Die Dirac-Gleichung

– **Aus der Lagrange-Dichte:** $\mathcal{L} = \overline{\Psi}\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\Psi(x)$ **mit** $\overline{\Psi} \equiv \Psi^\dagger(x)\gamma^0$ **und**

der Lagrange-Gleichung: $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi(x)} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi(x))}\right) = 0$

folgt die Dirac-Gleichung: $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\Psi(x) = 0$

– **4-komponentiger Spinor:** $\Psi(x) \quad \Rightarrow$ **Die DG beschreibt vier Freiheitsgrade**

– **Die 4x4-γ Matrizen:** $\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$ **hängen von den**

2x2-Pauli Matrizen: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **ab.**

$$I \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Dirac-Gleichung ist invariant unter Lorentz-Transformationen.

Eine spezielle Lösung der Dirac-Gleichung

Betrachte ein ruhendes Teilchen: $\vec{p} = 0$

Damit ergibt sich für die Dirac-Gleichung: $\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - m\right) \Psi(t) = 0$

Dieses System hat vier linear unabhängige Lösungen: Ψ_i **mit** $i = 1, 2, 3, 4.$

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}, \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \quad \text{mit} \quad \hat{E}\,\Psi_{1,2} = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{1,2} = +m\Psi_{1,2}$$

$$\Psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+imt}, \quad \Psi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+imt}, \quad \text{mit} \quad \hat{E}\,\Psi_{3,4} = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{3,4} = -m\Psi_{3,4}$$

Die vier Freiheitsgrade:

$$|\,\Psi_1\,\rangle = |\,E = +m, \uparrow\,\rangle, \qquad |\,\Psi_2\,\rangle = |\,E = +m, \downarrow\rangle,$$

$$|\,\Psi_3\,\rangle = |\,E = -m, \uparrow\,\rangle, \qquad |\,\Psi_4\,\rangle = |\,E = -m, \downarrow\rangle.$$

Die Dirac-Gleichung beschreibt Teilchen/Antiteilchen und Spin up/down.

Eichinvarianz der Maxwell-Gleichungen

(1) $\nabla\vec{B} = 0 \qquad \Rightarrow \vec{B} = \nabla\times\vec{A}$

(2) $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \Rightarrow 0 = \nabla\times\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{A}\right) = \underbrace{\nabla\times\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \equiv \nabla\times\nabla(-V)}$

(3) $\nabla\vec{E} = \rho$

(4) $\nabla\times\vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial E}{\partial t}$

$$\Downarrow$$

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Eichtransformation: $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda$ und $V' = V - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$ mit $\Lambda = \Lambda(t, \vec{x})$

Felder invariant da: $\left[\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right] = 0$ und $\nabla\times\nabla\Lambda = 0$, für alle Λ

$$\vec{B}' = \nabla\times\vec{A}' = \nabla\times\vec{A} + \nabla\times\nabla\Lambda = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\nabla V' - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = -\nabla V + \nabla\frac{\partial\Lambda}{\partial t} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\Lambda = \vec{E}$$

Ladungserhaltung: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\vec{j} = 0$

Aus (3) und (4): $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\vec{j} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\vec{E} + \nabla\left(\nabla\times\vec{B}\right) - \nabla\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0.$

Die Eichinvarianz der Maxwellgleichungen hat weit reichende Konsequenzen.

Kovariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen

– Wegen der Lorentz-Invarianz der MG bietet sich eine kovariante Formulierung an.

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

– Vektorpotential: $A^\mu \equiv (V, \vec{A})$ und Eichtransformation: $A^{\mu\prime} = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$

– Die inhomogene Maxwellgleichungen ergeben sich aus

$\nabla \vec{E} = \rho$, und $\nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ mit $j^\nu \equiv (\rho, \vec{j})$ zu:

$$\boxed{j^\nu = \partial_\mu F^{\mu\nu} = (\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu) = \Box A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu)}$$

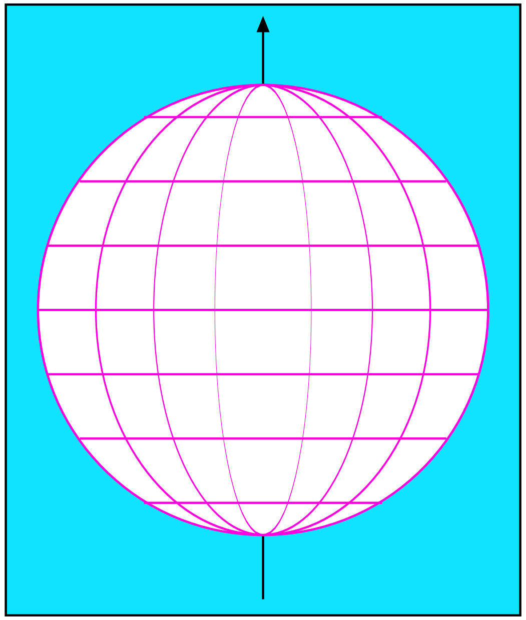
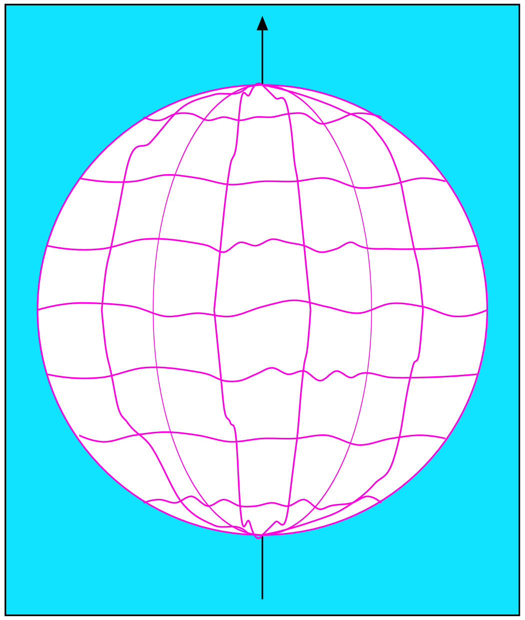
– Die Ladungserhaltung: $\boxed{\partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0}$

– Die Wellengleichung für ein masseloses freies Photon $j^\nu \equiv 0$ in Lorentz-Eichung

$\partial_\mu A^\mu \equiv 0$ lautet: $\boxed{\Box A^\nu = 0}$ KG-Gleichung mit $m = 0$.

Die kovariante Formulierung ist für relativistische Rechnungen besser geeignet.

Eichtransformationen freier Felder

Global: $\Phi' = e^{i\Lambda}\ \Phi$	Lokal: $\Phi' = e^{i\Lambda(x)}\Phi$
	
Invarianz $\Rightarrow$ Ladungserhaltung	Wechselwirkung mit Photonfeld

Die Forderung nach lokaler Eichinvarianz erzwingt ein masseloses Eichboson.

Globale Eichtransformation

– Physikalische Observablen sind Erwartungswerte von Operatoren $\hat{O}$ und werden durch $\langle\hat{O}\rangle = \langle\,\Psi\,|\hat{O}|\,\Psi\,\rangle$ berechnet, z.B. $\langle\hat{p}\rangle = \langle\,\Psi\,|\hat{p}|\,\Psi\,\rangle = p\langle\,\Psi\,|\,\Psi\,\rangle = p$.

– Eine Globale Phasentransformation: $|\,\Psi'\,\rangle = e^{i\Lambda}|\,\Psi\,\rangle$

– Invarianz der Erwartungswerte: $\langle\,\Psi'\,|\hat{O}|\,\Psi'\,\rangle = \langle\,\Psi\,|e^{-i\Lambda}\hat{O}e^{i\Lambda}|\,\Psi\,\rangle = \langle\,\Psi\,|\hat{O}|\,\Psi\,\rangle$

– Auch die Bewegungsgleichungen sind invariant.

– Beispiel Dirac-Gleichung:

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi' = m\Psi'$$

$$i\gamma^\mu\partial_\mu e^{i\Lambda}\Psi = e^{i\Lambda}i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = e^{i\Lambda}m\Psi = me^{i\Lambda}\Psi$$

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = m\Psi \qquad \surd$$

– Betrachte den Ladungsoperator: $Q|\,\Psi\,\rangle = q|\,\Psi\,\rangle$ mit $U \equiv e^{i\Lambda Q}$.
Wegen $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \ldots$ ist $e^{i\Lambda Q} = 1 + i\Lambda Q + \ldots$
Anwendung auf $|\,\Psi\,\rangle$ liefert $e^{i\Lambda Q}|\,\Psi\,\rangle = e^{i\Lambda q}|\,\Psi\,\rangle$ und wegen $[\,S, U\,] = 0$,
i.e.: $\langle\,\Psi\,|SU|\,\Psi\,\rangle = \langle\,\Psi\,|Se^{i\Lambda Q}|\,\Psi\,\rangle = \langle\,\Psi\,|Se^{i\Lambda q}|\,\Psi\,\rangle = \langle\,\Psi\,|e^{i\Lambda q}S|\,\Psi\,\rangle = \langle\,\Psi\,|US|\,\Psi\,\rangle$
folgt die Ladungserhaltung: $[\,S, Q\,] = 0$.

Die globale Eichinvarianz führt zur Erhaltung der Ladung

Lokale Eichtransformation

– **Eine lokale Eichtransformation:** $\Psi' = e^{iq\Lambda(x)}\Psi$

In Dirac-Gleichung: $i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi' = m\Psi'$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \left[e^{iq\Lambda(x)}\Psi\right] = m\left[e^{iq\Lambda(x)}\Psi\right]$$

$$e^{iq\Lambda(x)} i\gamma^\mu \left[\partial_\mu + iq\left(\partial_\mu \Lambda(x)\right)\right]\Psi = e^{iq\Lambda(x)} m\Psi$$

– **Der Term** $iq\partial_\mu \Lambda(x)$ **erinnert an die Eichfreiheit der Maxwell-Gleichungen, deswegen versucht man einen Ansatz für ein geladenes Teilchen im Feld.**

$$\left.\begin{array}{c} E \longrightarrow E + qV \\ \vec{p} \longrightarrow \vec{p} + q\vec{A} \end{array}\right\} \quad P_\mu = p_\mu + qA_\mu \;\Rightarrow\; D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu \quad \text{da} \quad p_\mu = i\partial_\mu.$$

$$D'_\mu = \partial_\mu - iqA'_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu - iq\partial_\mu \Lambda(x)$$

– **In Dirac-Gleichung:** $i\gamma^\mu D'_\mu e^{iq\Lambda(x)}\Psi = me^{iq\Lambda(x)}\Psi$

$$e^{iq\Lambda(x)} i\gamma^\mu \left[\partial_\mu + iq\left(\partial_\mu \Lambda(x)\right) - iqA_\mu - iq\left(\partial_\mu \Lambda(x)\right)\right]\Psi = e^{iq\Lambda(x)} m\Psi$$

$$i\gamma^\mu D_\mu \Psi = m\Psi$$

– **Invarianz der Dirac-Gleichung erreicht man nur mit den simultanen Transformationen**

$$\Psi' = e^{iq\Lambda(x)}\Psi \quad \text{und} \quad D'_\mu = D_\mu - iq\partial_\mu \Lambda(x).$$

Die lokale Eichinvarianz erzwingt die Wechselwirkung mit dem Photonfeld.

Die Paritätstransformation

– **Spiegelung am Ursprung:** $|\,\vec{r}'\,\rangle = P|\,\vec{r}\rangle = -|\,\vec{r}\rangle$ **und** $|\,t'\,\rangle = P|\,t\,\rangle = |\,t\,\rangle$.

– **Das Transformationsverhalten einiger Variablen:**

Skalar: $P|\,E\,\rangle = |\,E\,\rangle$, **Axialvektor:** $P|\,\vec{L}\,\rangle = P|\,\vec{r}\times\vec{p}\rangle = (-1)^2|\,\vec{L}\,\rangle = |\,\vec{L}\,\rangle$

Vektor: $P|\,\vec{r}\rangle = -|\,\vec{r}\rangle$, **Pseudoskalar:** $P|\,\lambda\,\rangle = P|\,\frac{\vec{s}\vec{p}}{|\vec{p}|}\,\rangle = -|\,\lambda\,\rangle$,

Kugelwellenfunktionen: $PY_l^m(\theta,\phi) = (-1)^l Y_l^m(\theta,\phi)$

– **Teilchen können Eigenzustände zur Parität sein.**

Es gilt: $P|\,i\,\rangle = \eta_P(i)|\,i\,\rangle$ **und** $P^2|\,i\,\rangle = \eta_P(i)\eta_P(i)|\,i\,\rangle = |\,i\,\rangle \quad\Rightarrow\quad \eta_P(i) = \pm 1$

– **Für Fermionen und Antifermionen wird** $\eta_P(f) = 1$ **und** $\eta_P(\bar{f}) = -1$ **festgelegt.**

– **Die Parität ist eine multiplikative Quantenzahl.**

– **Beispiele zusammengesetzter Systeme:**

Baryonen ($l = 0$): $P|\,qqq\,\rangle = 1^3|\,qqq\,\rangle = +1|\,qqq\,\rangle$

Antibaryonen ($l = 0$): $P|\,\bar{q}\bar{q}\bar{q}\,\rangle = (-1)^3|\,\bar{q}\bar{q}\bar{q}\,\rangle = -1|\,\bar{q}\bar{q}\bar{q}\,\rangle$

Meson ($l \neq 0$): $P|\,q\bar{q}\,\rangle = 1\cdot(-1)\cdot(-1)^l|\,q\bar{q}\,\rangle = (-1)^{l+1}|\,q\bar{q}\,\rangle$

Die Parität ist nicht in allen Wechselwirkungen erhalten.

Die Ladungskonjugation oder C-Parität

- Die Ladungskonjugation $C|\, e^- \rangle = \eta_C(e^-)|\, e^+ \rangle$ transformiert Teilchen in Antiteilchen.
- Man definiert für Fermionen und Antifermionen $\eta_C(f) = \eta_C(\bar{f}) = 1$.
- Die C-Parität ist eine multiplikative Quantenzahl.
- In elektromagnetischen Wechselwirkungen ist η_C eine Erhaltungsgröße, $[\, S, C\,] = 0$.
- Nur ungeladene Teilchen können Eigenzustände zur C-Parität sein.
- Die C-Parität des Photons und des neutralen Pions, π^0:

  1) Da das γ an die Ladung koppelt gilt für die Amplitude: $\langle\, e^-\gamma\, |S|\, e^- \,\rangle = -\langle\, e^+\gamma\, |S|\, e^+ \,\rangle$.

  2) $\langle\, e^-\gamma\, |S|\, e^- \,\rangle = \langle\, e^-\gamma\, |C^\dagger SC|\, e^- \,\rangle = \eta_C^2(e^-)\eta_C(\gamma)\langle\, e^+\gamma\, |S|\, e^+ \,\rangle = \eta_C(\gamma)\langle\, e^+\gamma\, |S|\, e^+ \,\rangle$

  $\boxed{\eta_C(\gamma) = -1}$ und für das π^0 gilt: $C|\, \pi^0 \,\rangle = C|\, 2\gamma \,\rangle = (-1)^2|\, 2\gamma \,\rangle$, $\boxed{\eta_C(\pi^0) = +1}$
- Wegen der Erhaltung der C-Parität existiert der Zerfall $\pi^0 \to 3\gamma$ also nicht.
- Die Erhaltung der C-Parität ist eine nützliche Eigenschaft z.B. im Zerfall $\eta \to \pi^-\pi^+\pi^0$

  Es gilt: $\langle\, \pi^-\pi^+\pi^0\, |S|\, \eta \,\rangle = \langle\, \pi^-\pi^+\pi^0\, |C^\dagger SC|\, \eta \,\rangle = \eta_C^2(\eta)\langle\, \pi^+\pi^-\pi^0\, |S|\, \eta \,\rangle$

  Der Zustand wird in sich selbst überführt. Dies bedeutet aber, dass die Winkelverteilung von π^+ und π^- identisch sein muss, was experimentell bestätigt wurde.

Auch die C-Parität ist nicht in allen Wechselwirkungen erhalten.

Die Zeitumkehr

- Die Zeitumkehr dreht den zeitlichen Ablauf einer Reaktion um. Für ein Elementarereignis folgt also: $T|\,1+2 \longrightarrow 3+4\,\rangle = |\,3+4 \longrightarrow 1+2\,\rangle$
- Zeitumkehrtrafo: $T|\,\vec{r}, t\,\rangle \equiv |\,\vec{r}, -t\,\rangle$
  - Beispiele:
    - Impuls: $T|\,\vec{p}\rangle = -|\,\vec{p}\rangle$ da $\vec{p} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
    - Drehimpuls: $T|\,\vec{L}\,\rangle = T|\,m\,\vec{r} \times \vec{p}\rangle = -|\,\vec{L}\,\rangle$
    - Helizität: $T|\,\lambda\,\rangle = |\,\lambda\,\rangle$
- Makroskopisch gilt T-Invarianz nur für Ereignisse ohne Entropieänderung. Das Zerbrechen einer Flasche läßt sich auch durch Zeitumkehr nicht reparieren.
- Mikroskopisch führt das Studium der Zeitumkehr-Transformation zum Prinzip des detaillierten Gleichgewichts.
- Dies führt zum Beispiel für $1+2 \longrightarrow 3+4$ auf die folgende Relation:

$$\frac{\frac{d\sigma}{d\Omega}(1+2\rightarrow 3+4)}{\frac{d\sigma}{d\Omega}(3+4\rightarrow 1+2)} = \frac{|p_3|^2(2J_{(3)}+1)(2J_{(4)}+1)}{|p_1|^2(2J_{(1)}+1)(2J_{(2)}+1)}, \quad \text{mit} \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}.$$

Die Zeit ist und bleibt eines der schwierigsten Konzepte der Physik.

Die Invarianz der Wechselwirkungen

Wechselwirkung / Symmetrie	C	P	CP	CPT
stark	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
elektromagnetisch	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
schwach	$-$	$-$	$-$	$\surd$

– In der schwachen Wechselwirkung (sWW) gibt es sowohl C- als auch P-Verletzung.

– An der sWW nehmen nur linkshändige Teilchen teil $\vec{s} \uparrow\downarrow \vec{p}$ bzw. $\lambda = \frac{\vec{s}\vec{p}}{|\vec{p}|} = -|\vec{s}|$.

Ein Neutrino: $|\,\nu\,\rangle \equiv |\,\nu, \lambda = -\frac{1}{2}\,\rangle$

P-Verletzung: $P|\,\nu, \lambda = -\frac{1}{2}\,\rangle = |\,\nu, \lambda = +\frac{1}{2}\,\rangle$ existiert nicht.

C-Verletzung: $C|\,\nu, \lambda = -\frac{1}{2}\,\rangle = |\,\bar{\nu}, \lambda = -\frac{1}{2}\,\rangle$ existiert nicht.

CP-Transformation: $CP|\,\nu, \lambda = -\frac{1}{2}\,\rangle = |\,\bar{\nu}, \lambda = +\frac{1}{2}\,\rangle$ existiert.

– Trotzdem ist CP in der sWW verletzt. Dies wurde in Kaon- und B-Systemen gemessen. Eine ausführliche Diskussion der CP-Verletzung folgt später.

– Die CPT-Invarianz ist ein Eckpfeiler der Quantenfeldtheorie. Sie hat weit reichende Bedeutung, z.B. gilt damit $m_f = m_{\bar{f}}$ und $\tau_f = \tau_{\bar{f}}$.

Die Symmetrien der Wechselwirkungen sind das Objekt vieler Untersuchungen.

Zusammenfassung

- Aus der Erhaltung der Norm $\langle\, i \,|\, i \,\rangle = 1$ folgt, dass die S-Matrix, die die Übergange eines Anfangszustands $i = initial$ in einen Endzustand $f = final$ beschreibt, $\langle\, f \,|S|\, i \,\rangle$, unitär sein muss.
- Kommutatoren $[\, S, O \,] = SO - OS$ sind sehr wichtige Hilfsmittel der Quanten-mechanik. Eigenwerte von hermiteschen Operatoren, die mit der S-Matrix vertauschen, sind Erhaltungsgrößen.
- Das Noether-Theorem, *'Für jede kontinuierliche Symmetrie existiert ein Erhaltungssatz.'*, ist ein wichtiges Hilfsmittel zum Studium von Symmetrien.
- Der Lagrange-Formalismus liefert die Bewegungsgleichung, er führt zum Beispiel auf die Dirac-Gleichung.
- Die Dirac-Gleichung ist invariant unter Lorentz-Tansformationen und beschreibt massive, relativistische Fermionen / Antifermionen mit halbzahligem Spin, up / down.
- Die Eichinvarianz der Feldtheorie ist fundamental. Die globale Eichinvarianz führt zur Erhaltung der Ladung und die lokale Eichinvarianz erzwingt die Wechselwirkung mit dem Photonfeld.
- C-, P- und T-Invarianz sind nicht in allen Wechselwirkungen gegeben, aber die CPT-Invarianz ist ein Eckpfeiler der Quantenfeldtheorie und aus ihr folgt $m_f = m_{\bar{f}}$ und $\tau_f = \tau_{\bar{f}}$.